# 第一章　半导体中电子状态

## 内容提要

(1)固体可以分为晶体和非晶体两大类。晶体是由原子或离子有规则排列而成，因此，晶体结构的周期性是其基本特征。半导体材料锗和硅是金刚石结构，它的一个晶胞是一个正立方体，可以看成是由两个面心与立方晶胞套构而成。闪锌矿结构与金刚石结构的唯一差别是体内对角线$\frac{1}{4}$处的四个原子和格点上其他原子不相同，化合物半导体 GaAs 即属此例。

(2)在周期性势场中，电子薛定谔方程的解为布洛赫函数，即波函数：

$$\psi_k(r) = u_k(r)e^{i2\pi k\cdot r}$$

式中，

$$u_k(r+na)=u_k(r)$$

$u_k(r)$反映了周期势场对电子运动的影响，说明晶体中电子在原胞中不同位置出现的几率不同。平面波因子$e^{i2\pi k\cdot r}$表明晶体中电子不再是局域化的，扩展于整个晶体之中，反映了电子的共有化运动。$u_k(r)$的周期性说明了晶体中不同原胞的各等价位置上出现的几率相同。

(3)由于共有化运动，晶体中电子可以看成是整个晶体共有的，因此孤立原子的能级形成能带。能带通常只对有序的晶态物质而言，是关于晶体中电子运动的一种量子理论。它说明了晶体中电子能量限定在某些“带”中。这种情况下，电子能态是按照电子的准动量$hk$或电子波矢$k$分类的。即电子的$E(k)$-$k$关系。

(4)能带中电子可以用波矢$k$描写其状态。即电子能量$E$和速度$v$都是$k$的函数。即：

$$E(k) = \frac{h^2k^2}{2m_0}, v(k) = \frac{1}{h}\frac{dE}{dk}$$

晶体中电子的所有运动状态都可以由$k$空间一个有限的区域来描写，把$k$空间的这个区域叫做布里渊区。

(5)为了使半导体中的电子在外力作用下，也能够写出加速度与外力之间类似经典力学的简单关系，引入了有效质量概念。有效质量张量是能量对准动量二次导数的倒数，即：

$$m_n^* = \left(\frac{d^2E}{dp^2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{h^2}\quad\frac{d^2E}{dk^2}\right)^{-1}$$

在能量极小值附近$m_n^* > 0$，在能量极大值附近$m_n^* < 0$

应用有效质量概念不仅能像讨论自由电子一样讨论晶体电子的运动，而且由于$m_n^*$与能带结构有关，有助于对能带的研究。

(6)有效质量$m_n^*$可以通过回旋共振实验测得，并据此推出半导体的能带结构。根据能量极值出现在布里渊区的位置，极值附近等能面形状，以及能量椭球主轴的方向，极值

对称出现的个数说明了硅、锗和砷化镓的导带和价带结构。

回旋共振的频率由下式决定：

$$\omega_c = \frac{qB}{m_n^*}$$

式中，$m_n^*$ 是电子的回旋有效质量。

$$m_n^* = \left(\frac{m_x^*\alpha^2 + m_y^*\beta^2 + m_z^*\gamma^2}{m_x^* m_y^* m_z^*}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$m_x^*$、$m_y^*$、$m_z^*$ 分别为椭球等能面三个主轴方向上电子的有效质量；$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 分别是磁场 $B$ 相对主轴方向的方向余弦。

(7)空穴是几乎充满的能带中未被电子占据的空量子态。用空穴的运动可近似描述近满带中电子集体的运动状态。因此，空穴为一准粒子，其物理特性可以用价带电子的性质来描述。可以把空穴视为一个携带正电荷，并以与该空状态相对应的电子速度 $v(k)$ 运动的粒子。空穴具有正的有效质量，空穴导电实质就是价带中大量电子的导电。

## 问　题

1—1　原子中的电子和晶体中电子受势场作用情况以及运动情况有何不同？原子中内层电子和外层电子参与共有化运动有何不同？

1—2　在 $N$ 个原子组成的晶体中，若由原来的一个原子能级分裂的能级数大于 $N$ 或小于 $N$，是否与泡利不相容原理矛盾？

1—3　如何理解能级“分裂”成能带？试以 NaCl 和 $C^6$ 为例，说明孤立原子的能级和能带的对应情况。

1—4　晶体体积的大小对能级和能带有什么影响？

1—5　描述半导体中电子运动为什么要引入“有效质量”的概念？用电子的惯性质量 $m_0$ 描述能带中电子运动有何局限性？

1—6　一般来说，对应于高能级的能带较宽，而禁带较窄，是否如此？为什么？

1—7　通常，晶格势场对电子作用力 $F_L$ 是不容易直接测定的，但可以通过它与外力场 $F_e$ 的关系：

$$F_L = \left(\frac{m_0}{m_n^*} - 1\right)F_e$$

去求得。式中 $m_0$ 表示电子质量，$m_n^*$ 表示电子有效质量，试推导上述关系。

1—8　有两种晶体其能量与波矢的关系如图 1-1 所示。试问，哪一种晶体电子的有效质量大一些？为什么？

1—9　一维晶格能量 $E$ 与波矢 $k$ 的关系如图 1-2 所示。分别讨论下面几个问题：

(1)如电子能谱和自由电子一样，写出与简约波矢 $k=\frac{1}{4a}$对应的 $A$(第 I 能带)，$B$(第 II 能带)，$C$(第 III 能带)三点处的能量 $E$。

(2)图中，哪个能带上的电子有效质量最小？

(3)图中能带上是否有某些位置，外力对这些位置上的电子没有影响？

(4)若能带Ⅰ、Ⅱ完全填满，而能带Ⅲ是完全空着的，此时稍稍加热晶体，把少数电子从第Ⅱ能带激发到第Ⅲ能带，问空穴数是否等于电子数？

(5)第Ⅱ能带上空穴的有效质量$|m_p^*|$比第Ⅲ能带上的电子有效质量$|m_n^*|$大还是小？

(6)比较能带Ⅱ空穴占据的能量间隔$\Delta E_2$和能带Ⅲ上电子占据的能量间隔$\Delta E_3$哪一个大？

(7)当$k$为何值时，能带Ⅰ和能带Ⅱ之间，能带Ⅱ和能带Ⅲ之间发生跃迁需要的能量最小？

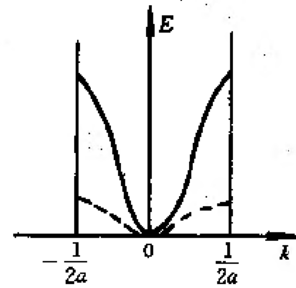



图 1-1

1—10　有效质量对能带的宽度有什么影响？有人说："有效质量愈大，能态密度也愈大，因而能带愈窄。"是否如此？为什么？

1—11　简述有效质量与能带结构的关系？

1—12　对于自由电子，加速度方向与外力作用方向一致，这个结论是否适用于布洛赫电子？

1—13　从能带底到能带顶，晶体中电子的有效质量将如何变化？外场对电子的作用效果有什么不同？

1—14　试述在周期性势场中运动的电子具有哪些一般属性？

1—15　为什么说，通常有效质量是一个张量？何时出现负值？其物理意义如何？有什么比较直接的方法可以研究半导体中电子的有效质量？简要说明实验原理。

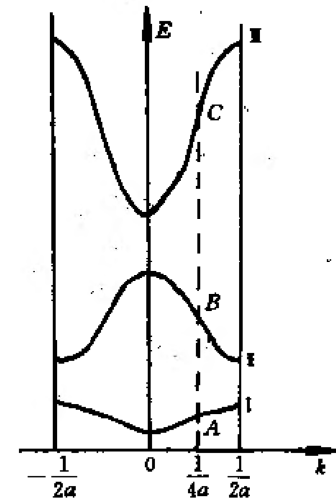



图 1-2

1—16　以硅的本征激发为例，说明半导体能带图的物理意义及其与硅晶格结构的联系？为什么电子从其价键上挣脱出来所需的最小能量就是半导体的禁带宽度？

1—17　为什么半导体满带中的少量空状态可以用具有正电荷和一定质量的空穴来描述？

1—18　试论证空穴具有下述的主要特征：

(1)空穴浓度等于价带中空状态浓度。

(2)空穴所带的正电荷等于电子电荷。

(3)空穴的有效质量$m_p^*$等于原空状态内电子有效质量的负值，即$m_p^*=-m_n^*$。

(4)空穴的波矢$k_p$等于原状态内电子波矢$k_n$的负值，即$k_p=-k_n$。

(5)空穴的能量$E_p$等于原空穴状态内电子能量$E_n$的负值，即$E_p=-E_n$。

1—19　讨论晶体中电子在能带极值点速度$v$与波矢$k$的关系？

1—20　有两块硅单晶，其中一块的重量是另一块重量的二倍。这两块晶体价带中的能级数是否相等？彼此有何联系？

1—21　解释布里渊区边界方程：$n\cdot\left(k-\frac{n}{2a}\right)=0$的几何意义和物理意义。

1—22　对三维晶体来说，布里渊区边界面上发生能量的不连续，这种界面上能量的

不连续是否意味着一定有禁带存在？

1—23 如果能量极值并不在 $k$ 空间的原点。而是位于 $k_x$ 轴上某点处，则对应于同一能量极值有多少个状态？如果能量极值是位于体对角线上的一点。情况又如何？

1—24 说明布里渊区和 $k$ 空间等能面这两个物理概念的不同。

1—25 二维平面晶体如图 1-3 所示。晶格常数已注于图上。画出第一、第二布里渊区的边界并简要说明画法的根据。

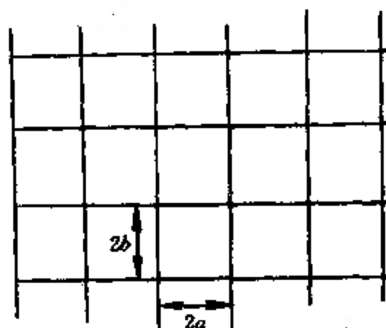



图 1—3

1—26 简述，Ge·Si 和 GaAs 能带结构的主要特征。分别画出 $K$ 空间〔100〕和〔111〕方向的一维能带图，标出导带极小值和价带极大值在 $k$ 空间中的位置。分别给出能带极值附近电子和空穴等能面形状。

1—27 置于均匀磁场中的半导体中的电子受到的洛仑兹力 $F_L=qv\times B$；式中速度 $v$ 是由什么决定的？为什么说回旋共振实质上也是一种光吸收现象？

1—28 为什么极值附近的等能面是球面的半导体，当改变磁场方向时只能观察到一个共振吸收峰？

1—29 如何理解“回旋共振有效质量 $m^*$ 不仅通过 $m_x^*$，$m_y^*$ 和 $m_z^*$ 而与能带结构有关，而且还与磁场和等能面主轴之间的相对方位有关”。

1—30 布洛赫函数中的波矢 $k$ 有什么物理意义？什么是电子的准动量？它是否就是布洛赫电子的动量？为什么在运动方程中外力等于电子准动量的变化率 $F=\hbar\frac{dk}{dt}$，而不等于电子真实动量的变化率？

## 解题示例

**例 1** 某半导体晶体价带顶附近能量 $E$ 可表示为：$E(k)=E_{max}-10^{26}k^2$(erg)，现将其中一波矢 $k=10^7$i/cm 的电子移走，试求此电子留下的空穴的有效质量，波矢及速度。

〔解〕 由题中条件可知：$E(k)=E_{max}-10^{26}(k_x^2+k_y^2+k_z^2)$，显然价带顶附近等能面为球面，则有效质量为各向同性，即是一标量。

$$\frac{1}{m_n^*}=\frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}$$

$$\therefore\quad m_p^*=-m_n^*=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}\right)^{-1}=(6.62\times10^{-27})^2\times\left(-\frac{1}{2\times10^{-26}}\right)$$

$$=2.2\times10^{-27}(\text{g})$$

由速度 $v(k)=\frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k}$ 可得：

$$v_x=\frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k_x}=\frac{1}{\hbar}\times(-2\times10^{-26})k_x$$

$$v_y=\frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k_y}=\frac{1}{\hbar}\times(-2\times10^{-26})k_y$$

$$v_z=\frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k_z}=\frac{1}{\hbar}\times(-2\times10^{-26})k_z$$

当 $k=10^7\mathrm{i/cm}$ 时：

$$v(k)=-\frac{1}{h}\times(-2\times10^{-26})\times10^7\mathrm{i}$$
$$=3.02\times10^7\mathrm{i(cm/s)}$$

∵空穴的波矢 $k_p=-k_n$　　∴$k_p=-10^7\mathrm{i/cm}$

**例 2**　在各向异性晶体中，其能量 $E$ 可用波矢 $k$ 的分量表示成：

$$E(k)=Ak_x^2+Bk_y^2+Ck_z^2$$

试求出能代替牛顿方程　$F=m_0\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$的电子运动方程。

〔**解**〕　因为电子的运动速度可表示成：

$$v=\frac{1}{h}\ \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}$$

∴电子加速度为：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}\right)=\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)$$

由于单位时间内能量增加等于力在单位时间内所做的功：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=F\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=F\cdot v=F\cdot\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{h^2}F\cdot\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}k^2}=\frac{1}{h^2}\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}k^2}\cdot F$$

令　$\frac{1}{h^2}\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}k^2}=\frac{1}{m_{ni}^*}$按题中所给条件：$E(k)=Ak_x^2+Bk_y^2+Ck_z^2$ 得

$$\frac{1}{m_{nx}^*}=\frac{2A}{h^2}\qquad\frac{1}{m_{ny}^*}=\frac{2B}{h^2}\qquad\frac{1}{m_{nz}^*}=\frac{2C}{h^2}$$

于是：

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{2A}{h^2}F_x\qquad\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{2B}{h^2}F_y\qquad\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{2C}{h^2}F_z$$

或者写成：

$$F_x=\frac{h^2}{2A}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\qquad F_y=\frac{h^2}{2B}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\qquad F_z=\frac{h^2}{2C}\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

上式即为各向异性晶体中电子的运动方程。

**例 3**　证明：对于能带中的电子，$\boldsymbol{k}$ 状态和 $-\boldsymbol{k}$ 状态的电子速度大小相等，方向相反。即：$v(\boldsymbol{k})=-v(-\boldsymbol{k})$

并解释为什么无外场时，晶体总电流等于零。

〔**解**〕　$\boldsymbol{k}$ 状态电子的速度为：

$$v(\boldsymbol{k})=\frac{1}{h}\left[\frac{\partial E(k)}{\partial k_x}i+\frac{\partial E(k)}{\partial k_y}j+\frac{\partial E(k)}{\partial k_z}k\right]\tag{1}$$

同理，$-\boldsymbol{k}$ 状态电子的速度则为：

$$v(-\boldsymbol{k})=\frac{1}{h}\left[\frac{\partial E(-k)}{\partial k_x}i+\frac{\partial E(-k)}{\partial k_y}j+\frac{\partial E(-k)}{\partial k_z}k\right]\tag{2}$$

从一维情况容易看出：

$$\frac{\partial E(-k)}{\partial k_x}=-\frac{\partial E(k)}{\partial k_x}\tag{3}$$

同理有：

$$\frac{\partial E(-k)}{\partial k_y}=-\frac{\partial E(k)}{\partial k_y} \tag{4}$$

$$\frac{\partial E(-k)}{\partial k_z}=-\frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial k_z} \tag{5}$$

将式(3)、(4)、(5)代入式(2)后得：

$$v(-k)=-\frac{1}{h}\left[\frac{\partial E(k)}{\partial k_x}i+\frac{\partial E(k)}{\partial k_y}j+\frac{\partial E(k)}{\partial k_z}k\right] \tag{6}$$

利用(1)式即得：$v(-k)=-v(k)$

因为电子占据某个状态的几率只同该状态的能量有关，即：

$E(k)=E(-k)$故电子占有 $k$ 状态和 $-k$ 状态的几率相同，且

$v(k)=-v(-k)$，故这两个状态上的电子电流相互抵消，晶体中总电流为零。

**例 4** 已知一维晶体的电子能带可写成：

$$E(k)=\frac{h^2}{m_0a^2}\left(\frac{7}{8}-\cos 2\pi ka+\frac{1}{8}\cos 6\pi ka\right)$$

式中，$a$ 为晶格常数。试求：

(1)能带的宽度；

(2)电子的波矢 $k$ 状态时的速度；

(3)能带底部和顶部电子的有效质量。

〔解〕 (1)由 $E(k)$关系得：

$$\frac{dE}{dk}=\frac{\pi h^2}{m_0a^2}\left(2\sin 2\pi ka-\frac{3}{4}\sin 6\pi ka\right)$$

$$=\frac{\pi h^2}{m_0a}\left[2\sin 2\pi ka-\frac{3}{4}(3\sin 2\pi ka-4\sin^3 2\pi ka)\right]$$

$$=\frac{\pi h^2}{m_0a}\left(3\sin^3 2\pi ka-\frac{1}{4}\sin 2\pi ka\right) \tag{1}$$

$$\frac{d^2E}{dk^2}=\frac{\pi^2h^2}{m_0}\left(18\sin^2 2\pi ka\cos 2\pi ka-\frac{1}{2}\cos 2\pi ka\right) \tag{2}$$

令 $\quad \frac{dE}{dk}=0 \quad$ 得：$\sin^2 2\pi ka=\frac{1}{12}$

$$\therefore \cos 2\pi ka=\pm\left(\frac{11}{12}\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $\cos 2\pi ka=\sqrt{\frac{11}{12}}$时，代入(2)得：

$$\frac{d^2E}{dk^2}=\frac{\pi^2h^2}{m_0}\left[18\times\frac{1}{12}\times\sqrt{\frac{11}{12}}-\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{11}{12}}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{11}{12}}\,\frac{\pi h^2}{m_0}>0$$

对应 $E(k)$的极小值。

当 $\cos 2\pi ka=-\sqrt{\frac{11}{12}}$时，代入(2)得：

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}k^2}=\frac{\pi h^2}{m_0}\left[-18\times\frac{1}{12}\times\sqrt{\frac{11}{12}}+\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{11}{12}}\right]$$

$$=-\sqrt{\frac{11}{12}}\,\frac{\pi^2 h}{m_0}<0$$

对应 $E(k)$极大值。

根据上述结果，求得 $E_{\min}$和 $E_{\max}$即可求得能带宽度。

$$\because\qquad E(k)=\frac{h^2}{m_0a^2}\left(\frac{7}{8}-\cos2\pi ka+\frac{1}{8}\cos6\pi ka\right)$$

$$=\frac{h^2}{m_0a^2}\left[\frac{7}{8}-\cos2\pi ka+\frac{1}{8}(4\cos^3\pi ka-3\cos2\pi ka)\right]$$

$$=\frac{h^2}{m_0a^2}\left(\frac{7}{8}-\frac{11}{8}\cos2\pi ka+\frac{1}{2}\cos^3 2\pi ka\right)$$

将 $\cos2\pi ka=\sqrt{\frac{11}{12}}$代入得：

$$E_{\min}=\frac{h^2}{m_0a^2}\left[\frac{7}{8}-\frac{11}{8}\left(\sqrt{\frac{11}{12}}\right)^2\right]$$

$$=\frac{h^2}{m_0a^2}\left[\frac{7}{8}-\left(\frac{11}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

将 $\cos2\pi ka=-\sqrt{\frac{11}{12}}$代入得：

$$E_{\max}=\frac{h^2}{m_0a^2}\left[\frac{7}{8}+\frac{11}{8}\sqrt{\frac{11}{12}}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{11}{12}}\right)^3\right]$$

$$=\frac{h^2}{m_0a^2}\left[\frac{7}{8}+\left(\frac{11}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

故：能带宽度 $\Delta E=E_{\max}-E_{\min}=2\left(\frac{11}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{h^2}{m_0a^2}$

(2)由题中可给 $E(k)$关系可得电子在波矢 $k$ 状态时的速度为：

$$v(k)=\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}=\frac{1}{h}\frac{\pi h^2}{m_0a^2}(3\sin^3 2\pi ka-\frac{1}{4}\sin2\pi ka)$$

$$=\frac{\pi h}{m_0a^2}\left(3\sin^3 2\pi ka-\frac{1}{4}\sin2\pi ka\right);$$

(3)能带底部和顶部电子有效质量：

$$(m_e^*)_{带底}=\left[\frac{1}{h^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}k^2}\right)_{底}\right]^{-1}$$

$$=\left[\frac{1}{h^2}\sqrt{\frac{11}{12}}\,\frac{\pi^2k^2}{m}\right]^{-1}$$

$$=4\left(\frac{12}{11}\right)^{\frac{1}{2}}m_0=4.18m_0$$

$$(m_e^*)_{顶}=\left[\frac{1}{h^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}k^2}\right)_{顶}\right]^{-1}$$

$$= \left\{\frac{1}{\hbar^2}\left[-\sqrt{\frac{11}{12}}\frac{\pi^2\hbar^2}{m_0}\right]\right\}^{-1}$$

$$= -4\left(\frac{12}{11}\right)^{\frac{1}{2}}m_0 = -4.18m_0$$

**例 5** 设有一平面六角晶格(如图 1-4),基矢为:

$$a_1 = \frac{a}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}aj$$

$$a_2 = -\frac{a}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}aj$$

式中,$a$ 为六角形平行对边的距离。

(1)证明倒格子原胞的面积等于正格子原胞面积的倒数;

(2)试画出此晶格的第一、二、三布里渊区。

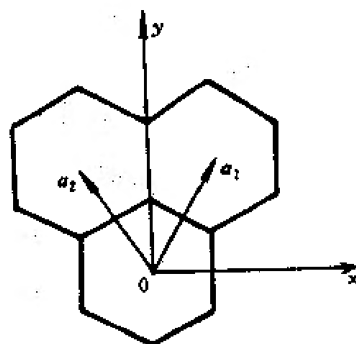



图 1-4

〔解〕 (1)引进一个与六角平面垂直的单位矢量 $k$。则

$$\Omega = a_1 \cdot (a_2 \times k)$$

$$= \left(\frac{a}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}aj\right) \cdot \left[\left(-\frac{a}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}aj\right) \times k\right]$$

$$= \left(\frac{a}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}aj\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}ai + \frac{a}{2}j\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

根据倒格子基矢定义:

$$b_1 = \frac{a_2 \times k}{\Omega} = \frac{1}{a}i + \frac{1}{\sqrt{3}a}j$$

$$b_2 = \frac{k \times a_1}{\Omega} = -\frac{1}{a}i + \frac{1}{\sqrt{3}a}j$$

显然: $|b_1| = |b_2| = \dfrac{2}{\sqrt{3}a}$

正格子原胞的面积:

$$S = |a_1 \times a_2| = \left|\left(\frac{a}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}aj\right) \times \left(-\frac{a}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}aj\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

倒格子原胞的面积:

$$S^* = |b_1 \times b_2| = \left|\left(\frac{1}{a}i + \frac{1}{\sqrt{3}a}j\right) \times \left(-\frac{1}{a}i + \frac{1}{\sqrt{3}a}j\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}a^{-2}$$

故 $s^* = \dfrac{1}{s}$

(2)由 $b_1, b_2$ 可得到倒格子矢为:

$$k_n = n_1 b_1 + n_2 b_2 = (n_1 - n_2)\frac{1}{a}i + (n_1 + n_2)\frac{1}{\sqrt{3}}j$$

式中,$n_1$、$n_2$ 为整数。将 $k_n$ 代入布里渊区边界方程

$$k_n \cdot \left(k + \frac{k_n}{2}\right) = 0$$

得：$(n_1-n_2)k_x+\frac{1}{\sqrt{3}}(n_1+n_2)k_y=-\frac{1}{a}\left[\frac{(n_1+n_2)^2}{2}+\frac{(n_1+n_2)^2}{6}\right]$ (1)

若 $n_1$、$n_2$ 取(1,0)，($\bar{1}$,0)，(0,1)，(0,$\bar{1}$)得：

$$\pm k_x \pm k_y = \frac{2}{3} \quad \frac{1}{a} \tag{2}$$

若 $n_1$，$n_2$ 分别取(1,$\bar{1}$)，($\bar{1}$,1)得：

$$\pm k_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{a} \tag{3}$$

由(2)和(3)两式决定的六条边界线围成的最小闭合区域为第一布里渊区，紧邻第一区；由上述六条界线围成的六个分立的闭合区域为第二布里渊区。

若 $n_1$，$n_2$ 取(1,$\bar{1}$)，($\bar{1}$,1)得：$\pm k_x=\frac{1}{a}$ (4)

若 $n_1$，$n_2$ 取(1,2)，(2,1)，($\bar{1}$,$\bar{2}$)，($\bar{2}$,$\bar{1}$)则得：

$$\pm k_x \pm \sqrt{3}k_y = \frac{2}{a} \tag{5}$$

由(4)、(5)两式决定的六条边界线和前面边界线构成第三布里渊区(如图 1-5 所示)。

**例 6** 晶格常数为 2.5Å 的一维晶格，当外加 $10^2$V/m 和 $10^7$V/m 电场时，试分别计算电子自能带底运动到能带顶所需时间。

〔解〕 设电场强度为 $E$

$\because F=h\frac{dk}{dt}=qE$ (取绝对值)

$\therefore dt=\frac{h}{qE}dk$

$\therefore t=\int_0^t dt=\int_0^{\frac{1}{2a}}\frac{h}{qE}dk$

$=\frac{h}{qE}\ \frac{1}{2a}$

代入数据得：

$$t=\frac{6.62\times10^{-34}}{2\times1.6\times10^{-19}\times2.5\times10^{-10}\times E}$$

$$=\frac{8.3\times10^{-6}}{E}(s)$$

当 $E=10^2$V/m 时，$t=8.3\times10^{-8}$(s)

$E=10^7$V/m 时，$t=8.3\times10^{-13}$(s)

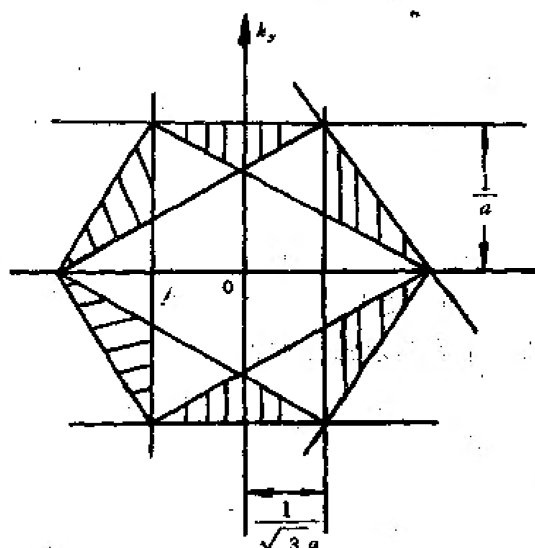



图 1-5

**例 7** 硅的导带沿<100>方向共有六个极小值，在极小值附近等能面为旋转椭球面(图 1-6($a$))。其横向和纵向有效质量各为 $m_t\approx0.19m_0$，$m_l\approx0.98m_0$，$m_0$ 为自由电子静质量。

当外磁场在(110)平面内并与〔001〕方向成 30°角时，测得的硅单晶的回旋共振信号如图 1-6($b$)所示，电子的两个共振吸收峰的位置在 0.2950T 和 0.19T 处，试对照图 1-6：

(1)解释虽然硅沿<100>方向有六个极值椭球却只有两个电子回旋共振吸收峰。

(2)证明图 1-6($b$)给出的吸收峰位置与上面给出的 $m_t$、$m_l$ 值及公式：

$$\omega_C=\frac{eB}{m^*} \qquad m^*=\frac{m_1m_2m_3}{m_1\alpha^2+m_2\beta^2+m_3\gamma^2} \tag{1}$$

是相符的。式中，$m_1$、$m_2$、$m_3$ 是椭球等能面三个主轴方向有效质量；$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 是磁感应强度 $B$ 相对于椭球主轴的三个方向余弦。

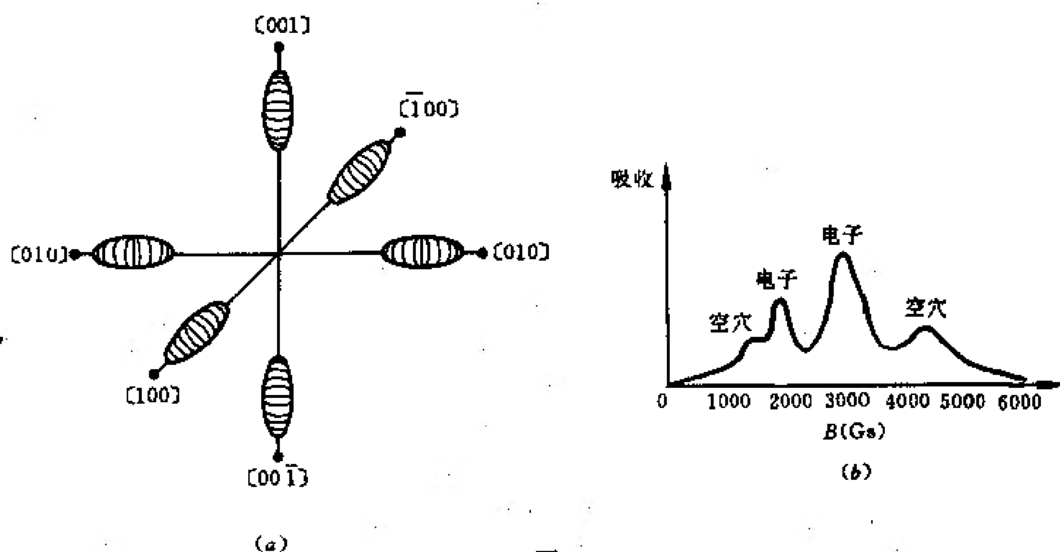



图 1-6

〔解〕 (1)因磁感应 $B$ 在(110)平面内并与〔001〕方向成 30°角，故 $B$ 在 $x$、$y$、$z$ 轴的投影分量各是 $B\sin30°\cos45°$，$B\sin30°\cos45°$，$B\cos30°$，即 $B$ 的单位矢量 $\hat{B}$ 在 $x$、$y$、$z$ 轴上分量为：

$$\hat{B}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8}}(1,\ -1,\ \sqrt{6}) \tag{2}$$

取 $k_1$、$k_2$、$k_3$ 为三个直角坐标轴，并令 $k_3$ 轴沿椭球长轴方向(即沿〔100〕方向)，再适当选取 $k_1$ 轴方向，使 $B$ 位于($k_1$，$k_3$)平面内并与椭球长轴交角为 $\theta$，则在($k_1$、$k_2$、$k_3$)直角坐标系中，$B$ 的三个方向余弦分别为：

$$\alpha=\sin\theta \quad \beta=0 \quad \gamma=\cos\theta$$

再令 $m_1=m_2=m_t \cdot m_3=m_l$ 则式(1)化为：

$$m^*=\left(\frac{m_1m_2m_3}{m_1\alpha^2+m_2\beta^2+m_3\gamma^2}\right)^{½}=\left(\frac{m_t^2m_l}{m_t\sin^2\theta m_l\cos^2\theta}\right)^{½} \tag{3}$$

对于沿 $x$ 轴方向(〔100〕和〔$\bar{1}$00〕)的一对旋转椭球，由式(2)知 $\cos\theta=\hat{B}_x=\pm1/\sqrt{8}$，得 $\cos^2\theta=1/8$，$\sin^2\theta=7/8$，代入式(3)得：

$$m_1^*=\left(\frac{m_t^2m_l}{7m_t/8+m_l/8}\right)^{½} \tag{4}$$

对于沿 $y$ 轴方向(〔010〕和〔0$\bar{1}$0〕)的一对旋转椭球，由式(2)知 $\cos\theta=\hat{B}_y=\pm1/\sqrt{8}$，也得 $\cos^2\theta=1/8$，$\sin^2\theta=7/8$，代入式(3)得 $m_2^*=m_1^*$。

对于沿 Z 轴方向(〔001〕和〔00 $\bar{1}$〕)的一对旋转椭球，由式(2)知 $\cos\theta=\hat{B}_z=\pm\sqrt{3}/2$，得 $\cos^2\theta=3/4$，$\sin^2\theta=1/4$，代入式(3)得：

$$m_3^*=\left(\frac{m_t^2m_l}{m_t/4+3m_l/4}\right)^{1/2} \tag{5}$$

综上，因为只有两个不同的 $\cos^2\theta$ 值，即只有两个不同的 $m^*$ 值，所以只能出现两个不同的回旋共振吸收峰。

(2)将 $m_l=0.98m_0$, $m_t=0.19m_0$ 代入式(4)解得 $m_1^*=0.35m_0$，与之相应的磁感应强度是：

$$B_1=\omega m_1^*/e=2\pi\nu m_1^*/e$$
$$=2\pi\times2.4\times10^{10}\times0.35\times9.1\times10^{-31}/1.6\times10^{-19}$$
$$=0.3001\text{T}$$

同理可得 $m_2^*=0.213m_e$，与之相应的磁感应强度是：

$$B_2=\omega m_2^*/e=2\pi\nu m_2^*/e=0.1823\text{T}$$

计算所得 $B_1$、$B_2$ 值与题给共振吸收峰位置 0.2950T、0.19T 相当接近。

**例 8** 如果 n 型半导体导带极值在〔110〕轴上及相应对称方向上，回旋共振实验结果应如何？

〔解〕 根据立方对称性，应有下列 12 个方向上的旋转椭球面：

〔110〕,〔101〕,〔011〕,〔$\bar{1}\ \bar{1}$ 0〕,

〔$\bar{1}0\bar{1}$〕,〔0 $\bar{1}\ \bar{1}$〕;

〔$1\bar{1}0$〕,〔$10\bar{1}$〕,〔$01\bar{1}$〕,〔$\bar{1}10$〕,

〔$\bar{1}01$〕,〔$0\bar{1}1$〕;

则由解析几何定理得，$B$ 与 $k_3$ 的夹角余弦 $\cos\theta$ 为：

$$\cos\theta=\frac{b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\cdot\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}}$$

式中，$B=b_1i+b_2j+b_3k$。

对不同方向的旋转椭球面取不同的一组$(k_1,k_2,k_3)$。

(1)若 $B$ 沿(111)方向，则 $\cos\theta$ 可以取两组数。

对〔$1\bar{1}0$〕,〔$\bar{1}\ \bar{1}$ 0〕,〔101〕,〔$\bar{1}0\bar{1}$〕,

〔$0\bar{1}1$〕,〔$01\bar{1}$〕方向的旋转椭球得：

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

对〔$1\bar{1}0$〕,〔$\bar{1}10$〕,〔$\bar{1}01$〕,〔$10\bar{1}$〕,〔$0\bar{1}1$〕,〔$01\bar{1}$〕方向的旋转椭球得：

$$\cos\theta=0$$

$\therefore$ 当 $\cos\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 时： $\cos^2\theta=\frac{2}{3}$ $\sin^2\theta=\frac{1}{3}$

$$\because m_n=m_t\sqrt{\frac{m_0}{m_t\sin^2\theta+m_l\cos^2\theta}}$$

$$\therefore m_n^*=\sqrt{\frac{3m_l}{m_t+2m_l}}\cdot m_t$$

当 $\cos\theta=0$ 时； $\cos^2\theta=0$ $\sin^2\theta=1$

同理得：$m_n^*=\sqrt{m_lm_t}$

由 $\omega_c=qB/m_n^*$ 可知，当 $B$ 沿(111)方向时应有两个共振吸收峰。

(2)若 $B$ 沿〔110〕方向，则 $\cos\theta$ 可以取三组数。

对$[110]$，$[\bar{1}\bar{1}0]$

方向旋转椭球，$\cos\theta=1$

对$[1\bar{1}0][\bar{1}10]$

方向旋转椭球，$\cos\theta=0$

对$[011]$，$[0\bar{1}1]$，$[01\bar{1}]$，$[0\bar{1}\bar{1}]$，$[101]$，$[\bar{1}0\bar{1}]$，$[10\bar{1}]$，$[\bar{1}01]$方向的旋转椭球，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

当$|\cos\theta|=1$时：$\cos^2\theta=1\quad\sin^2\theta=0$

得：$m_n^*=mt$

当$|\cos\theta|=0$时：$\cos^2\theta=0\quad\sin^2\theta=1$

得：$m_n^*=\sqrt{m_tm_l}$

当$|\cos\theta|=\dfrac{1}{2}$时：$\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}\quad\sin^2\theta=\dfrac{3}{4}$

得：$m_n^*=m_t\sqrt{\dfrac{4m_l}{3m_t+m_l}}$；故，应有三个吸收峰。

(3)若 $B$ 沿$[100]$方向，则 $\cos\theta$ 可以取两组数。

对$[110]$，$[\bar{1}10]$，$[1\bar{1}0]$，$[\bar{1}\bar{1}0]$，$[\bar{1}01]$，$[10\bar{1}]$，$[\bar{1}0\bar{1}]$，$[101]$方向上的旋转椭球得：

$$|\cos\theta|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

对$[011]$，$[0\bar{1}1]$，$[01\bar{1}][0\bar{1}\bar{1}]$方向上的旋转椭球得：

$$|\cos\theta|=0$$

当$|\cos\theta|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时：$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}\quad\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}$

得：$m_n^*=m_tt\sqrt{\dfrac{2m_l}{m_t+m_l}}$

当 $\cos\theta=0$ 时：$\cos^2\theta=0\qquad\sin^2\theta=1$

得：$m_n^*=\sqrt{m_tm_l}$

∴应有两个共振吸收峰。

(4)$B$ 沿空间任意方向时，$\cos\theta$ 最多可有六个不同值，故可以求六个 $m_n^*$，所以应有六个共振吸收峰。

## 习　题

1—1　一维周期势场中电子的波函数 $\psi_k(x)$应当满足布洛赫定理，若晶格常数为 $a$，电子的波函数为：

(1)$\psi_k(x)=\sin\dfrac{\pi}{a}x$

(2)$\psi_k(x)=i\cos\dfrac{3\pi}{a}x$

(3)$\psi_k(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}f(x-na)$　（$f$ 为某一确定的函数）

试求电子在这些状态的波矢 $k$。〔答案：(1)$k=\dfrac{1}{2a}$，(2)$k=\dfrac{1}{2a}$，(3)$k=0$〕

1—2　已知某二维点阵基矢为$|a_1|=3\text{cm}$，$|a_2|=4\text{cm}$，夹角为30°，如图1-7所示，试求：

(1)写出倒格子基矢；

(2)计算正格子和倒格子原胞体积；

(3)画出对应的倒格子点阵。

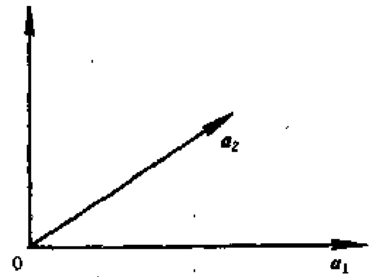



图 1-7

1—3　平面正三角形晶格(如图1-8所示)相邻原子间距是$a$，试求：

(1)正格子基矢和倒格子基矢；

(2)画出第一布里渊区，并求此区域的内接圆半径。

$\left(\text{答案}: a_1=ai, a_2=\frac{a}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}aj, b_1=\frac{1}{a}i-\frac{1}{\sqrt{3}a}j,\right.$
$\left. b_2=\frac{2}{\sqrt{3}a}j, R=\frac{1}{\sqrt{3}a}\right)$

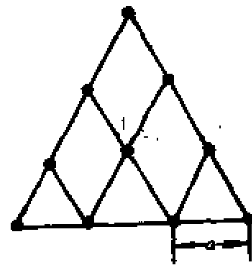



图 1-8

1—4　证明：$\omega=\frac{qB}{m_n^*}$为具有能量，$E(k)=\frac{h^2k^2}{2m_n^*}$的电子在磁场$B$中运动的角频率。

1—5　求证：外场对于满带电子的动量无贡献，因而满带电子不能导电。

1—6　设电子等能面方程为：$E(k)=\frac{hk_1^2}{2m_1}+\frac{hk_2^2}{2m_2}+\frac{hk_3^2}{2m_3}$；外加磁场$B$相对于椭球主轴的方向余弦为$\alpha$、$\beta$、$\gamma$。

(1)写出电子运动方程。

(2)求证：电子绕磁场回旋率$\omega$可写成：

$$\omega=\frac{qB}{m_n^*}\qquad \text{式中}:\frac{1}{m_n^*}=\left(\frac{m_1\alpha^2+m_2\beta^2+m_3\gamma^2}{m_1m_2m_3}\right)$$

(3)若设$m_1=m_2=m_t$，$m_3=m_l$。

证明：当磁场$B$在$k_1k_2$平面上时，回旋共振频率

$$\omega=\frac{qB}{(m_t^2m_l)^{1/2}}$$

(4)若磁场$B$在$k_1k_3$平面上且与$k_3$轴夹角为$\theta$时

则

$$\omega=qB\left(\frac{\cos^2\theta}{m_t^2}+\frac{\sin^2\theta}{m_tm_l}\right)^{1/2}$$

1—7　按照有效质量张量的定义：

$$(m_{ij})^{-1}=\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2E}{\partial k_i\partial k_j}$$

试写出下列各种情况下$m_n^*$的形式：

(1)自由电子；

(2)等能面为球形等能面；

(3)等能面为旋转椭球面；

(4)$E(k)$是$k$的任意函数形式。

1—8　n-Ge 的回旋共振实验测得当 $B_z$ 沿〔111〕方向时，有两个吸收峰，与之对应的 $m_c^*$ 分别为 $0.0819m_0$ 和 $0.208m_0$；试求电子的横向有效质量 $m_t$ 和纵向有效质量 $m_l$ 为多少个 $m_0$（$m_0$ 为电子惯性质量）。

1—9　半导体晶体的导带方程为 $E(k)=E_c+\frac{3h^2}{m_0}(k_x^2+k_y^2+k_z^2)$式中 $m_0$ 为自由电子质量，试求。

(1)导带中电子的有效质量。

(2)导带中电子的运动速度。

(3)求施主杂质能级的电离能（已知：半导体相对介电常数为 1.6，氢原子基态电子电离能 $E_0=13.6\text{eV}$）。

1—10　设能量极小点在 $k_x$ 轴上的 $k_{x0}$处，沿 $k_x$ 方向有效质量为 $m_x^*$，垂直于 $k_x$ 方向的有效质量为 $m_y^*=m_z^*$，且 $m_x^*=5m_y^*$，旋转轴为 $k_x$，试写出该等能面的方程式，并画出示意图。如图 1-9 所示，在 $z$ 方向上加有磁场 $B_z$，在 $xy$ 平面上加有电场 $E$，试写出电子的运动方程式。

1—11　设某半导体导带底的有效质量倒数可用张量表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & a_{yy} & a_{yz} \\ 0 & a_{zy} & a_{zz} \end{vmatrix}$$

(1)写出有效质量张量的各分量；

(2)试根据上述张量确定导带底附近等能面的性质。

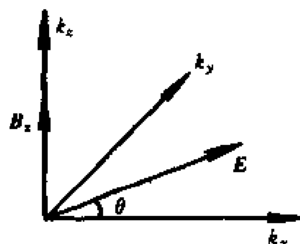


图 1-9

1—12　试证明在一级近似下，受非均匀磁场 $B(x,y,z)$作用下的电子在 $k$ 空间的运动被限制在等能面上。

1—13　试证明，如只考虑最近邻的相互作用，用紧束缚方法导出简单的立方晶体中的 $S$ 态电子的能带为：

$$E(k) = E_0 - A - 2J(\cos2\pi ak_x + \cos2\pi aky + \cos2\pi ak_z)$$

试求：(1)能带的宽度($\Delta E=12J$)；

(2)能带底和能带顶附近电子有效质量。

$$\left[(m_e^*)_{底} = \frac{h^2}{8\pi^2a^2J} \qquad (m_e^*)_{顶} = -\frac{h^2}{8\pi^2a^2J}\right]$$

1—14　有一薄层晶体样品，其长、宽、厚分别为 $L_x$、$L_y$、$L_z$，且 $L_z\ll L_x$，$L_z\ll L_y$，样品中电子可以被认为在一势井中运动，其能量谱值为：

$$E= \frac{h^2}{2m_0}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

$$= \frac{h^2}{2m_0}(k_x^2 + k_y^2) + E_z(n)$$

式中：

$$k_x = l\frac{2\pi}{L_x} \qquad k_y = m\frac{2\pi}{L_y} \quad (l,m = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots)$$

$$k_z = n\frac{\pi}{L_z} \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

$$E_z(n) = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

试分析能量谱值的特点，求出电子的状态密度并用图形示意之(提示：先求出二维样品中电子的态密度，而后计算三维薄层中电子的态密度)。

1—15 用具有球形等能面能带结构的半导体样品作回旋共振实验。设 $m_1^* = m_2^* = m_3^* = m_n^*$，直流磁场 $B$ 加在 $z$ 轴方向上，在 $x$、$y$ 平面上加有交流电场，且 $E_x = E_1\cos\omega t$，$E_y = E_1\sin\omega t$，写出电子在 $x$、$y$ 平面上的运动方程。若设 $v = v_x i + v_y j$，证明该方程的解为：

$$v = -\frac{(qE_1\tau/m_n^*)e^{i\omega t}}{[1 + i(\omega - \omega_0)\tau]}$$

式中： $\omega_0 = \dfrac{qB}{m_n^*}$

1—16 设半导体有两个价带，带顶均在 $k=0$ 处且能量相等，带顶空穴有效质量有以下关系：$m_1 = 3m_2$，试定性画出两者的 $E$-$k$ 关系图。

# 第二章　半导体中杂质和缺陷能级

## 内 容 提 要

(1)在纯净的半导体中掺入一定量的杂质，可以显著地控制半导体的导电性质。根据掺入杂质的分布位置可以分为替位式杂质和受主杂质。

(2)施主杂质电离后成为不可移动的带正电的施主离子，同时向导带提供电子，使半导体成为电子导电的n型半导体。受主杂离后成为不可移动的带负电的受主离子，同时向价带提供空穴，使半导体成为空穴导电的p型半导体。

(3)杂质元素掺入半导体后，由于在晶格势场中引入微扰，使能带极值附近出现分立的能级——杂质能级。V族元素在靠近导带底 $E_c$ 的禁带中引入施主能级 $E_D$，Ⅲ族元素在靠近价带顶 $E_v$ 的禁带中引入受主能级 $E_A$。类氢模型对浅能级的位置给出了比较满意的定量描述。

经过修正后，施主杂质的电离能可以表示为：

$$\Delta E_D = \frac{m_n^*}{m_0}\frac{E_0}{\varepsilon_r^2}$$

受主杂质的电离能可以表示为：

$$\Delta E_A = \frac{m_p^*}{m_0}\frac{E_0}{\varepsilon_r^2}$$

式中，$E_0 = 13.6\text{eV}$ 为氢原子基态电离能；$\varepsilon_r$ 为晶体的相对介电常数。

(4)施主杂质和受主杂质之间有相互抵消作用，通常称为“杂质补偿”。“杂质补偿”是制造各种半导体器件的基础。

(5)非Ⅲ、V族杂质元素在半导体中也可能会产生深能级或多能级。

例如：金Au在硅中电离后产生两个能级，一个在价带上面0.35eV处的施主能级$A_u^+$，它在P型硅中起主要作用。另一个在导带下面0.54eV处的受主能级$A_u^-$，它在n型硅中起主要作用。

(6)深能级和晶体缺陷形成的能级一般作为复合中心。

## 问　　题

2—1　说明类氢杂质能级以及电离能的物理意义。为什么受主、施主能级分别位于价带之上或导带之下，而且电离能的数值较小？

2—2　分析化合物半导体PbS中S的间隙原子和缺陷在理论上各形成施主还是受主？根据你的回答，说明半导体材料自补偿效应的物理意义？

2—3　纯Ge、Si中掺入Ⅲ族或V族元素后，为什么使半导体导电性能有很大的改变？

杂质半导体(p 型或 n 型)应用很广，但为什么我们很强调对半导体材料的提纯？

2—4 杂质能级为什么位于禁带之中？能带图上如何表示中性和电离杂质？杂质电离后在半导体中产生些什么？

2—5 把不同种类的施主杂质掺入同一种半导体材料中，杂质的电离能和轨道半径是否不同？把同一种杂质掺入到不同的半导体材料中(例如 Ge 或 Si)，杂质的电离能和轨道半径又是否都相同？

2—6 何谓深能级杂质？它们电离以后有什么特点？

2—7 为什么金元素在 Ge 或 Si 中电离后可以引入多个施主或受主能级？

2—8 现有两块外观完全相同的硅单晶，其中一块是高纯度的本征硅，另一块是含有深、浅施主和受主能级完全补偿的半导体。举出两种能识别它们的实验方法，并说明实验原理。

2—9 说明掺杂对半导体导电性能的影响。

2—10 说明半导体中浅能级杂质和深能级杂质的作用有何不同？

2—11 锑化铟(InSb)禁带宽度 $E_g=0.23\text{eV}$，相对介电常数 $\varepsilon_r=18$，电子有效质量 $m_n^*=0.015m_0$，计算：

(1)施主电离能($6.28\times10^{-4}\text{eV}$)；

(2)基态轨道半径($636\times10^{-8}\text{cm}$)；

(3)施主浓度最小为多大时，就会出现相邻杂质原子轨道间显著的交迭效应？

2—12 什么叫杂质补偿？什么叫高度补偿的半导体？杂质补偿有何实际应用？

2—13 磷化镓(GaP)的 $E_g=2.26\text{eV}$，相对介电常数 $\varepsilon_r=11.1$，若空穴有效质量 $m_p^*=0.86m_0$，试估算受主杂质的电离能和受主束缚的空穴的基态轨道半径？

## 解题示例

**例 1** 玻尔原子的允许轨道半径和能级由下式给出：

$$r_n=\frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi m_0 Z q^2}\qquad E_n=-\frac{m_0 q^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$$

式中，$Z$ 是原子序数；$q$ 和 $m_0$ 分别是电子的电量和质量；$h$ 是普朗克常数；$n=1,2,3,\cdots$为主量子数；$\varepsilon_0$ 是真空中的介电常数。

证明以上方程可以写成 $r_n=0.529\dfrac{n^2}{Z}(\text{Å})$

$$E_n=-13.6\frac{Z^2}{n^2}(\text{eV})$$

〔解〕 代入有关常数后

$$r_n=\frac{8.854\times10^{-14}\times10^{10}\times(6.624\times10^{-34})^2n^2}{3.14\times9.1\times10^{31}\times(1.6\times10^{19})^2Z}$$

$$=0.529\frac{n^2}{Z}(\text{Å})$$

$$E_n=\frac{9.1\times10^{-31}\times(1.60\times10^{-19})^4Z^4}{8\times(8.854\times10^{-12})^2\times(6.6\times10^{-34})^2n^2}$$

$$= \frac{21.8 \times 10^{-19} Z^2}{n^2} (\mathrm{J})$$

$$\therefore \quad E_n = -\frac{21.8 \times 10^{-19} \times 6.25 \times 10^{18} Z^2}{n^2}$$

$$= -13.6 \frac{Z^2}{n^2} (\mathrm{eV})$$

**例 2** 在半导体中，V 族杂质原子外层第五个电子的运动，可以看成是在围绕一个正的核电荷$+q$的圆形轨道上，并穿过具有体介电常数的材料。

试证明，如果介电常数为 11.7，则只需要有大约 0.1eV 能量的电子，就能在晶体中自由导电。求基态轨道的半径，从而说明电子是在体介质中运动的假设。材料的晶格常数为 5.42Å。

〔解〕 氢原子基态的能量为 $Z=1, n=1$ 时 $W_n$ 的值：

$$E_n = -13.6 \frac{Z^2}{\varepsilon^2 n^2} \text{(考虑介电材料的影响)}$$

$$= -13.6 \frac{1}{(11.7)^2} = 0.099 (\mathrm{eV})$$

显然，电子的能量只要大于 0.099eV，就能脱离核电荷的束缚，在晶体中运动。同理可得基态半径。

$$r = 0.529 \frac{\varepsilon n^2}{Z} = 0.529 \times 11.7 = 6.16 (\text{Å})$$

材料的晶格常数只有 5.42Å，而最小轨道略大于 5.42Å，说明电子是在最靠近相邻原子的外面运动，所以本质上还是在晶体中运动。

**例 3** 半导体硅单晶的介电常数 $\varepsilon_r = 11.8$，电子和空穴的有效质量各为 $m_{nl} = 0.97 m_0$，$m_{nt} = 0.19 m_0$ 和 $m_{pl} = 0.16 m_0$，$m_{ph} = 0.53 m_0$，利用类氢模型估计：(1)施主和受主电离能；(2)基态电子轨道半径 $r_1$；(3)相邻杂质原子的电子轨道明显交迭时，施主和受主浓度各为何值？

〔解〕 (1)利用下式求得 $m_n^*$ 和 $m_p^*$。

$$\frac{1}{m_n^*} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m_{nl}} + \frac{2}{m_{nt}}\right) = \frac{1}{3m_0}\left(\frac{1}{0.98} + \frac{2}{0.19}\right) = \frac{3.849}{m_0}$$

$$\frac{1}{m_p^*} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m_{pl}} + \frac{1}{m_{ph}}\right) = \frac{1}{3m_0}\left(\frac{1}{0.16} + \frac{2}{0.53}\right) = \frac{10}{3m_0}$$

因此，施主和受主杂质电离能各为：

$$\Delta E_D = \frac{m_n^*}{m_0} \frac{E_0}{\varepsilon_r^2} = \frac{1}{3.849} \times \frac{13.6}{11.8^2} = 0.025 (\mathrm{eV})$$

$$\Delta E_A = \frac{m_p^*}{m_0} \frac{E_0}{\varepsilon_r^2} = \frac{3}{10} \times \frac{13.6}{11.8^2} = 0.029 (\mathrm{eV})$$

(2)基态轨道半径各为：

$$r_{1,p} = \varepsilon_r m_c r_{B1} / m_p^* = 11.8 \times 10 \times 0.53/3$$

$$= 20.84 (\text{Å}) = 2.08 \times 10^{-9} \mathrm{m}$$

$$r_{1,n} = \varepsilon_r m_c r_{B1} / m_n^* = 11.8 \times 3.849 \times 0.53 = 24.07 (\text{Å})$$

$$= 2.41 \times 10^{-9} \mathrm{m}$$

式中，$r_{B1}$是玻尔半径。

(3)设每个施主杂质作用范围为$\frac{4}{3}\pi r_{1,n}^3$，即相当于施主杂质浓度为：

$$N_D=\frac{3}{4\pi r_{1,n}^3}=\frac{3}{4\pi\times(2.4\times10^{-9})^3}=1.7\times10^{25}(1/\text{m}^3)$$
$$=1.7\times10^{19}/\text{cm}^3$$

同理

$$N_A=\frac{3}{4\pi r_{1,p}^3}=\frac{3}{4\pi(2.08\times10^{-9})^3}=2.65\times10^{25}(1/\text{m}^3)$$
$$=2.65\times10^{19}/\text{cm}^3$$

当施主和受主杂质浓度分别超过以上两值时，相邻杂质原子的电子轨道(波函数)将明显地交迭。杂质电子有可能在杂质原子之间作共有化运动，造成杂质带导电。

## 习　题

2—1　InSb 的电子有效质量 $m_e=0.015$m，介电常数 $\varepsilon=18$，晶格常数 $a=6.479$ Å。试计算：

(1)施主电离能；

(2)基态的轨道半径；

(3)若施主均匀分布，相邻杂质原子的轨道之间发生交迭时，掺有的施主杂质浓度应高于多少？

2—2　试计算 GaAs 中施主电离能和受主电离能。已知 $E_g=1.43$eV，$m_n^*=0.06m_0$，$m_p^*=0.44m_0$，$\varepsilon=10.9$。

# 第三章　半导体中载流子的统计分布

## 内容提要

(1)晶体中电子的能量状态是量子化的。电子在各状态上的分布遵守费米分布规律。费米分布函数为：

$$f(E)=\frac{1}{1+e^{\frac{E-E_F}{k_0T}}}$$

当 $E-E_F\gg kT$ 时，费米分布近似为玻尔兹曼分布，即

$$f_B(E)=e^{-\frac{E-E_F}{k_0T}}$$

显然，它们都是能量和温度的函数。

通常把服从费米分布的半导体称为简并半导体，服从玻尔兹曼分布的半导体称为非简并半导体。

(2)费米能级 $E_F$ 是决定各个能级上电子和空穴统计分布的重要参数，它充分反映了半导体的掺杂情况。利用费米能级分析半导体处于热平衡状态时的情况是十分方便的。

(3)为了计算电子和空穴浓度，必须对一个能带内的所有能量积分，而不只是对布里渊区体积积分。为此引入状态密度概念，即单位能量间隔内的量子态数。其表达式为：

$$g(E)=\frac{dZ}{dE}$$

$g(E)$是由等能面形状决定的。对于硅、锗半导体，其导带等能面为旋转椭球面：

$$g_c(E)=4\pi V\frac{(2m_{dn})^{3/2}}{h^3}(E-E_c)^{1/2}$$

式中，　$m_{dn}=S^{\frac{2}{3}}(m_t^2m_l)^{1/3}$，$S$ 为导带极值的个数。

因为价带顶附近等能面近似为球面，可得：

$$g_v(E)=4\pi V\frac{(2m_{dp})^{3/2}}{h}(E_v-E)^{\frac{1}{2}}$$

$$m_{dp}=\left[(m_p)_l^{\frac{3}{2}}+(m_p)_h^{3/2}\right]^{\frac{2}{3}}$$

式中，$m_{dn}$和 $m_{dp}$分别为电子与空穴的状态密度有效质量。

(4)热平衡状态下，简并半导体的电子和空穴浓度分别为：

$$n_0=N_c\frac{2}{\sqrt{\pi}}F_{1/2}\left(\frac{E_F-E_c}{k_0T}\right)$$

$$p_0=N_v\frac{2}{\sqrt{\pi}}F_{1/2}\left(\frac{E_v-E_F}{k_0T}\right)$$

非简并半导体电子和空穴浓度分别为：

$$n_0 = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_0 T}} \qquad p_0 = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_0 T}}$$

$N_c$ 和 $N_v$ 分别是导带与价带的有效状态密度。它们与温度和半导体材料的性质有关，其表达式分别为：

$$N_c = \frac{2(2\pi m_{dn} k_0 T)^{3/2}}{h^3} \qquad N_v = \frac{2(2\pi m_{dp} k_0 T)^{3/2}}{h^3}$$

(5)由载流子浓度的基本公式出发，可以确定费米能级的位置。

本征半导体的费米能级 $E_F$ 位于禁带中央，即 $E_F = E_i$，故本征载流子浓度的公式为：

$$n_i = (N_c N_v)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E_g}{2k_0 T}}$$

掺杂半导体的费米能级 $E_F$ 和载流子浓度关系极为密切，经常用到的是强电离(亦称饱和区)，其费米能级 $E_F$ 的表达式为：

n 型半导体：

$$E_{Fn} = E_c + k_0 T \ln \frac{N_D}{N_c}$$

或

$$E_{Fn} = E_i + k_0 T \ln \frac{N_D}{n_i}$$

p 型半导体：

$$E_{Fp} = E_v + k_0 T \ln \frac{N_v}{N_A}$$

或

$$E_{Fp} = E_i - k_0 T \ln \frac{N_A}{n_i} \qquad \left(\frac{1}{2} E_g = E_i\right)$$

考虑到杂质补偿后，上面表达式中 $N_D$ 应换成 $(N_D - N_A)$，$N_A$ 换成 $(N_A - N_D)$。

在饱和区内，杂质浓度小于 $10^{17}/\text{cm}^3$ 时，半导体中多数载流子浓度基本等于掺杂浓度。即

n 型半导体：　　$n_0 \approx N_D$(或 $N_D - N_A$)

p 型半导体：　　$P_0 \approx N_A$(或 $N_A - N_D$)

少数载流子浓度可以由非简并半导体处于热平衡态时载流子浓度乘积公式决定。即：

$$n_0 p_0 = n_i^2$$

(6)半导体内总的正电荷和总的负电荷必须相等。整个半导体是电中性的。无论是本征半导体还是杂质半导体，都可利用电中性条件(或叫电荷中性方程)求得费米能级 $E_F$，热平衡时，电中性方程为：

$$P_0 + \sum_j n_{Dj}^+ = n_0 + \sum_i p_{Ai}^-$$

对于本征半导体：

$$p_0 = n_0 = n_i$$

对于只含一种施主杂质和一种受主杂质的半导体，根据电子在导带、价带以及杂质能级上的分布函数，电中性方程可化为：

$$N_v \exp \frac{E_v - E_F}{k_0 T} + \frac{N_D}{1 + 2\exp\left(-\frac{E_D - E_F}{k_0 T}\right)}$$

$$= N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{k_0 T}\right) + \frac{N_A}{1 + 2\exp \frac{E_A - E_F}{k_0 T}}$$

当杂质全部电离后，且本征激发不可忽略时，上式可变为：

$$p_0 + N_D = n_0 + N_A$$

(7)当半导体中掺杂浓度相当高时，被杂质原子束缚的电子相互作用而发生共有化运动，从而使孤立的杂质能级扩展为能带，形成杂质带导电，导致杂质电离能减小，禁带宽度 $E_g$ 也随之略有减小，这种高掺杂特性已广泛用于半导体器件生产中。

## 问　题

3—1　半导体处于怎样的状态才能叫处于热平衡状态？其物理意义如何。

3—2　什么叫统计分布函数？费米分布和玻尔兹曼分布的函数形式有何区别？在怎样的条件下前者可以过渡为后者？为什么半导体中载流子分布可以用玻尔兹曼分布描述？

3—3　说明费米能级 $E_F$ 的物理意义。根据 $E_F$ 位置如何计算半导体中电子和空穴浓度？如何理解费米能级 $E_F$ 是掺杂类型和掺杂程度的标志？

3—4　证明，在 $T\neq0$ 时，$f(E)$ 对费米能级 $E_F$ 取什么样的对称形式？

3—5　在半导体计算中，经常应用 $E-E_F\gg kT$ 这个条件把电子从费米统计过渡到玻尔兹曼统计，试说明这种过渡的物理意义。

3—6　写出半导体的电中性方程。此方程在半导体中有何重要意义？

3—7　若 n 型 Si 中掺入受主杂质，$E_F$ 升高还是降低？若温度升高当本征激发起作用时，$E_F$ 在什么位置？为什么？

3—8　如何理解分布函数与状态密度的乘积再对能量积分即可求得电子浓度？

3—9　不同掺杂浓度(同一杂质)的 n 型半导体其电子浓度和温度的关系曲线如图 3-1 所示。在左方曲线彼此重合，在右方超过某一温度 $T$ 后两条曲线平行？试说明其理由。这两部分曲线的斜率表示什么？

3—10　为什么硅半导体器件比锗器件的工作温度高？

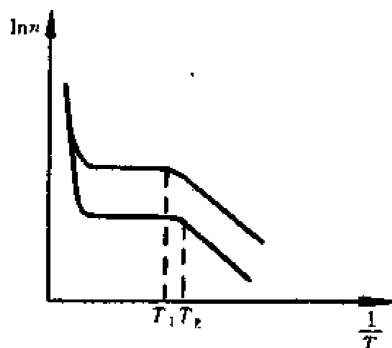



图 3-1

3—11　说明载流子浓度乘积方程：$n_0p_0=n_i^2$ 的物理意义。为什么杂质含量愈高，多子浓度愈大，而少子浓度愈小？当半导体中掺入的杂质类型和含量改变时，乘积 $n_0p_0$ 是否改变？当温度改变时，情况又如何？

3—12　对只含施主杂质的 n 型半导体，在室温时能否认为载流子浓度为：$n_0=N_D+n_i$，$p_0=n_i$？为什么？

3—13　欲使施主能级或受主能级恰好电离 1/3，各需满足什么条件？

3—14　有 n 型半导体，如果(1)不掺入受主；(2)掺入少量受主($N_A\ll N_D$)，那么当温度趋于 0K 时，两种情况下的费米能级的极限位置是否重合？

3—15　当温度一定时，杂质半导体的费米能级主要由什么因素决定？试把强 N、弱 N 型半导体与强 P、弱 P 型半导体的费米能级与本征半导体的费米能级比较。

3—16 有一n型半导体，掺入三种不同浓度的施主杂质后，得到的 $E_F$-$T$ 关系曲线如图 3-2 所示。试问曲线 1,2,3 中哪条对应较高的施主浓度，哪条对应较低的施主浓度？

3—17 什么叫载流子的简并化？试说明其产生的原因。有一重掺杂半导体，当温度升高到某一值时，导带中电子开始进入简并。当温度继续升高时简并能否解除？

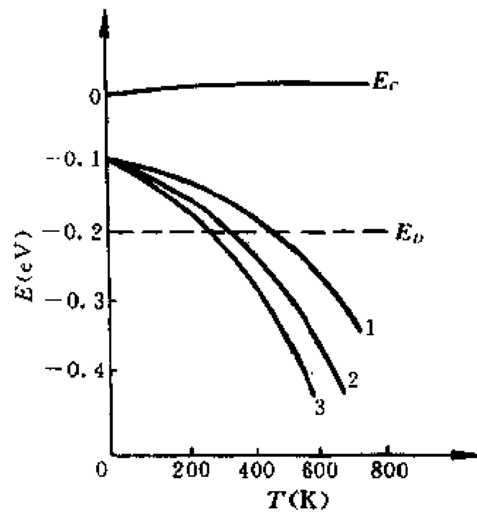



图 3-2

3—18 某含有一些施主的 p 型半导体在极低温度下（即 $T\to0$ 时）电子在各种能级上的分布情况如何？定性说明随温度升高分布将如何改变？

3—19 有四块含有不同施主浓度的 Ge 样品。在室温下分别为：

(1)高电导 n-Ge；(2)低电导 n-Ge；(3)高电导 p-Ge；(4)低电导 p-Ge；比较四块样品 $E_F$ 的高低。分别说明它们达到全部杂质电离与本征导电温度的高低？

3—20 有一块只含有一种受主杂质和一种施主杂质的 p 型硅单晶，用什么实验方法可以测定它的杂质补偿度（即 $\frac{N_D}{N_A}\times100\%$）？说明实验方法的原理。

3—21 室温下某 n 型 Si 单晶掺入的施主浓度 $N_D$ 大于另一块 n 型 Ge 掺入的施主浓度 $N_{D1}$；试问哪一块材料的平衡少子浓度较大？为什么？

3—22 如果向半导体中重掺施主杂质，就你所知会出现一些什么效应？

3—23 比较并区别下面的物理概念：

(1)$k$ 空间状态密度，能量状态密度和能带的有效状态密度；

(2)简并半导体和非简并导体。

3—24 试说明本征激发时，导带中平衡的电子浓度不正比于 $\exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right)$。

3—25 对 Si 在下面的掺杂条件下，定性讨论费米能级随温度的变化：

(1)含有 $10^{16}/cm^3$ 的硼；

(2)含有 $10^{16}/cm^3$ 的硼和 $9\times10^{15}/cm^3$ 的金；

(3)含有 $10^{15}/cm^3$ 的硼和 $9\times10^{15}/cm^3$ 的金。

3—26 金在硅中分别引入一个在导带 $E_c$ 下面 0.54eV 的受主能级，在价带顶 $E_v$ 上面 0.35eV 处的施主能级，在下列情况下的 Si 中，金能级将是什么样的电荷状态？

(1)高施主原子浓度；

(2)高受主原子浓度（均相对金浓度而言的）。

根据上面讨论结果，确定晶体是 n 型还是 p 型？

3—27 一块 n 型硅样品，在 500K 时，其中电子浓度为 $2\times10^{16}/cm^3$，空穴浓度为 $2\times10^{14}/cm^3$，问该半导体是否处于热平衡状态？（已知 500K 时，$n_i=4\times10^{14}/cm^3$）。

3—28 说明两种测定施主和受主杂质浓度的实验方法的原理。

3—29 指出图 3-3 中各表示的是什么半导体？

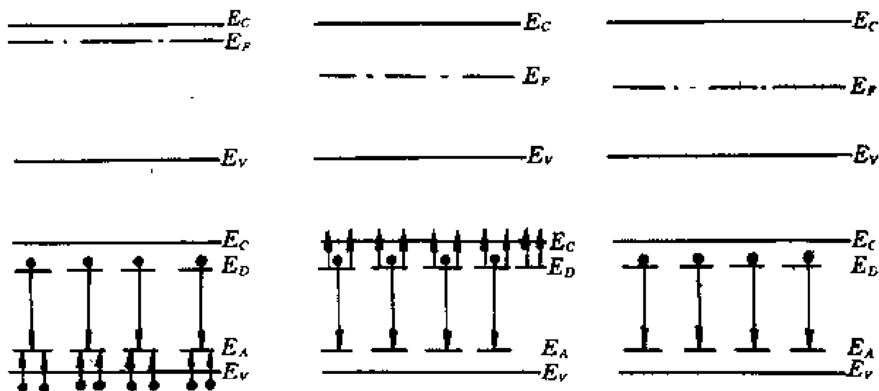



图 3-3

3—30 当 $T\to 0$ 时，n 型半导体的导带中电子浓度为"$n_{无}$"，若在该半导体中掺入少量的受主杂质，其浓度为 $N_A$ 时，导带中电子浓度为"$n_{有}$"，

试证明：

$$\frac{n_{有}}{n_{无}}=\left(\frac{n_{有}}{N_A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3—31 解释图 3-4$n_0$-$T$ 关系曲线。

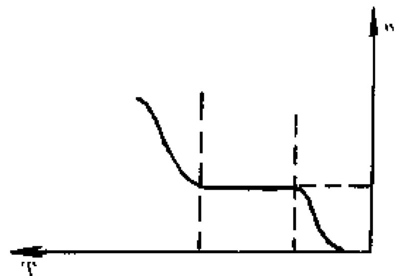



图 3-4

3—32 证明，有轻空穴和重空穴参与导电的 p 型材料，其空穴的状态密度有效质量可写成：

$$m_{dp}=\left[(m_p)_l^{\frac{3}{2}}+(m_p)_h^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}$$

式中，$(m_p)_l$ 为轻空穴的状态密度有效质量；

$(m_p)_h$ 为重空穴的状态密度有效质量。

## 解题示例

**例 1** 设二维正方格子的晶格常数为 $a$，若电子能量可表示为：

$$E(k)=\frac{h^2}{2m_n^*}(k_x^2+k_y^2)$$

试求状态密度。

〔**解**〕 能量为 $E$ 的等能面方程式可以写成：

$$k_x^2+k_y^2=\frac{2m_n^*E}{h^2}$$

显然，是一个半径 $R=\left(\frac{2m_n^*E}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的圆，其面积为：$\pi R^2=\frac{2\pi m_n^*E}{h^2}$ 乘以状态密度 $2S$（$S$ 为晶体的面积，且考虑自旋）就是圆内所包含的状态：

$$Z(E)=\frac{4\pi S m_n^*E}{h^2}$$

$Z(E)$ 即表示能量在 $E$ 以下状态的数目，如果能量增加 $dE$，则 $Z(E)$ 增加 $dZ(E)$，$dZ(E)$

就是能量 $E$ 到 $E+\mathrm{d}E$ 之间的状态数。

对上式求微分即得：

$$\mathrm{d}Z(E) = 4\pi S \frac{m_n^*}{h^2}\mathrm{d}E$$

单位能量间隔内的状态数，即状态密度为：

$$g(E) = \frac{\mathrm{d}Z(E)}{\mathrm{d}E} = 4\pi S \frac{m_n^*}{h^2}$$

**例 2** 若费密能级 $E_F=5\mathrm{eV}$，利用费米函数计算在什么温度下电子占据 $E=5.5\mathrm{eV}$ 能级的几率为 1%。并计算在该温度下电子分布几率从 0.9～0.1 所对应的能量区间。

〔解〕 由费米分布函数

$$f(E) = \frac{1}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{k_0T}\right)}$$

可得：

$$T=\frac{E-E_F}{k_0\ln\left(\frac{1}{f(E)}-1\right)}$$

$1\mathrm{eV}=1.602\times10^{-12}\mathrm{erg}, k_0=1.38\times10^{-16}\mathrm{erg/K}=8.63\times10^{-5}\mathrm{eV/K}$

代入有关数据得：

$$T = \frac{5.5-5}{8.63\times10^{5}\times\ln\left(\frac{1}{0.01}-1\right)} = 1261(\mathrm{K})$$

由费米函数可得：

$$E=E_F+k_0T\ln\left(\frac{1}{f(E)}-1\right)$$

当 $f=0.9$ 时：

$$E_1= E_F + 8.63\times10^{-5}\times1261\times\ln\left(\frac{1}{0.9}-1\right)$$
$$= E_F - 0.24(\mathrm{eV})$$

当 $f=0.1$ 时：

$$E_2= E_F + 8.63\times10^{-5}\times1261\times\ln\left(\frac{1}{0.1}-1\right)$$
$$= E_F + 0.24(\mathrm{eV})$$

能量区间为 $\Delta E=E_2-E_1=0.48(\mathrm{eV})$

**例 3** 某半导体硅样品，施主杂质原子的浓度为 $10^{12}/\mathrm{cm}^3$，试问在什么温度下它便不再呈现本征导电性？设 $E_g=1\mathrm{eV}$，

$$m_n^* = m_p^* = 0.2m_0$$

〔解〕 本征载流子浓度

$$n_i = (N_cN_v)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{E_g}{2k_0T}}$$

式中，$N_c=\frac{2(2\pi m_{dn}^*k_0T)^{\frac{3}{2}}}{h^3}$， $N_v=\frac{2(2\pi m_{dp}^*k_0T)^{\frac{3}{2}}}{h^3}$。

分别为导带和价带的有效状态密度。

若要保证硅样品为杂质导电，则施主杂质浓度必须等于或大于本征载流子浓度 $n_i$：

即：　$N_d \geqslant (N_c N_v)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E_g}{2k_0T}}$

代入已知数据：

$$m_n^* = m_p^* = 0.2m_0 = 0.2 \times 9.1 \times 10^{-28}$$

$$= 1.81 \times 10^{-28}(\text{g})$$

$$E_g = 1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-12}\text{erg}$$

$$N_c = N_v = \frac{2 \times (2 \times 3.14 \times 1.81 \times 10^{23} \times 1.38 \times 10^{-16})^{3/2}}{(6.62 \times 10^{-27})^3} T^{\frac{3}{2}}$$

$$= 4.30 \times 10^{14} T^{\frac{3}{2}} (1/\text{cm}^3)$$

∴　$10^{12} \geqslant 4.30 \times 10^{14} \times T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1.6\times10^{-12}}{2\times1.38\times10^{-16}\times T}}$

$$10^{12} \geqslant 4.30 \times 10^{14} \times T^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{5800}{T}\right)$$

$$\exp\left(\frac{5800}{T}\right) \geqslant 430 T^{\frac{3}{2}}$$

∴　$T = \dfrac{5800}{\frac{3}{2}\ln T + \ln 193}$

上式必须用相关数值解的方法求 $T$。比较简单的方法是给 $T$ 一个初始值代入方程右边，可得出一个新的 $T$ 值。再将所得的 $T$ 值代回方程右边进行计算，如此反复循环。直至代进去的 $T$ 值与计算出来的 $T$ 值相等（或非常接近）为止，这时所得的 $T$ 值即为所求。

| $T_n$(K) | $\ln T_n$ | $T_{n+1}$(K) |
|---|---|---|
| 300 | 5.04 | 419.8 |
| 419.8 | 5.97 | 405 |
| 405 | 6.09 | 406.6 |
| 406.6 | 6.01 | 406.3 |

可见 $T=406.6$K 时，则为上面方程的解。即温度低于 406K 时样品便不呈现本征导电。

**例 4**　有一硅样品，施主浓度为 $N_d=2\times10^{14}/\text{cm}^3$，受主浓度为 $N_A=10^{14}/\text{cm}^3$，已知施主电离能 $\Delta E_D=E_c-E_D=0.05$eV，试求 99％的施主杂质电离时的温度。

〔解〕　令 $N_D^+$ 表示电离施主的浓度，则电中性方程为：

$$n_0 + N_A^- = P_0 + N_D^+$$

略去价带空穴的贡献，则得：$n_0 = N_D^+ - N_A$（受主杂质全部电离）

式中：　$n_0 = N_c \exp\left(-\dfrac{E_c - E_F}{k_0 T}\right)$

对硅材料　　$N_c = 5.6\times10^{15} T^{3/2}$

由题意可知　　$N_D^+ = 0.99 N_D$ 则

$$0.99N_D - N_A = 5.6 \times 10^{15} T^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{k_0 T}\right) \qquad (1)$$

当施主有99%的电离时，说明只有1%的施主有电子占据，即 $f(E_D)=0.01$。

$$f(E_D)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\exp\frac{E_D-E_F}{k_0T}}=0.01$$

$\exp\frac{E_D-E_F}{k_0T}=198$　　　　$\therefore E_F=E_D-kT\ln 198$，代入式(1)得：

$$0.99N_D-N_A=5.6\times10^{15}T^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{E_c-E_D+k_0T\ln 198}{k_0T}\right)$$

取对数并加以整理即得到下面方程：

$$T=\frac{579}{\frac{3}{2}\ln T-1.21}$$

按照例4中提供的方法可算得　$T=101.8(\mathrm{K})$

**例5**　设一n型半导体导带电子的有效质量 $m_n^*=m_0$，求在300K时，使费米能级 $E_F=\frac{1}{2}(E_c+E_D)$ 的施主浓度。设此时施主的电离很弱。

〔解〕　一般情况下，施主杂质电离能比较小，要满足题设条件，则必须使半导体简并，为了计算简单，加之误差不大，仍可按非简并情况，故：

$$n_0=N_c\exp\left(-\frac{E_c-E_F}{k_0T}\right)$$

$$N_c=\frac{2(2\pi m_n^*k_0T)^{\frac{3}{2}}}{h^3}$$

又　　$N_D^+=N_D\cdot[1-f(E)]=\dfrac{N_D}{1+2\exp\left(-\frac{E_D-E_F}{k_0T}\right)}$

$$n_0=N_c\exp\left(-\frac{E_c-E_F}{k_0T}\right)$$

由电中性条件得：$n_0=N_D^+$

$$\therefore\quad N_c\exp\left(-\frac{E_c-E_F}{k_0T}\right)=\frac{N_D}{1+2\exp\left(-\frac{E_D-E_F}{k_0T}\right)}$$

当施主电离很弱时，即 $\frac{N_D^+}{N_D}\ll1$，上式右边分母中1可以略去

$$N_c\exp\left(-\frac{E_c-E_F}{k_0T}\right)=\frac{N_D}{2}\exp\left(\frac{E_D-E_F}{k_0T}\right)$$

$$E_F=\frac{1}{2}(E_c+E_D)+\frac{1}{2}k_0T\ln\frac{N_D}{2N_c}$$

若要求使 $E_F=\frac{1}{2}(E_c+E_D)$，则 $N_D=2N_c$

**例6**　计算能量 $E=E_c$ 到 $E=E_c+100\left(\frac{h^2}{8m_n^*L^2}\right)$ 之间单位体积中的量子态数。

〔解〕　导带底 $E_c$ 附近单位能量间隔量子态数：

$$g_c(E)=4\pi V\frac{(2m_{dn})^{3/2}}{h^3}(E-E_c)^{\frac{1}{2}}$$

$g_c$ 即状态密度。

在 d$E$ 范围内单位体积中的量子态数：

$$\frac{dZ}{V}=g_c(E)\cdot\frac{1}{V}\cdot dE$$

$$\therefore\quad Z=\frac{1}{V}\int_{E_1}^{E_2}dZ=4\pi\frac{(2m_n^*)^{3/2}}{h^3}\int_{E_c}^{E_c+100\left(\frac{h^2}{8m_n^*L^2}\right)}(E-E_c)^{\frac{1}{2}}dE$$

$$=4\pi\frac{(2m_n^*)^{3/2}}{h^3}\times\frac{2}{3}\times\left(100\frac{h^2}{8m_n^*L^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

故：$Z=1000\pi/3L^3$

**例 7** 试证明实际硅、锗中导带底附近状态密度公式为

$$g_c(E)=4\pi V\frac{(2m_n^*)^{3/2}}{h^3}(E-E_c)^{\frac{1}{2}}$$

式中，$m_n^*=m_{dn}=S^{\frac{2}{3}}(m_t^2m_l)^{\frac{1}{3}}$，$S$ 为导带底对称状态数。

〔证明〕 Si、Ge 在导带附近的等能面为沿主轴方向的旋转椭球面，设其极值仍为 $E_c$，则 $E(k)$-$k$ 关系为：

$$E(k)=E_c+\frac{h^2}{2}\left(\frac{k_1^2+k_2^2}{m_t}+\frac{k_3^2}{m_l}\right)$$

与椭球的标准方程：

$$\frac{k_1^2}{a^2}+\frac{k_2^2}{b^2}+\frac{k_3^2}{c^2}=1$$

比较得：

$$a=b=\left[\frac{2m_t(E-E_c)}{h^2}\right]^{1/2}$$

$$c=\left[\frac{2m_l(E-E_c)}{h^2}\right]^{1/2}$$

$a$、$b$、$c$ 即 $k$ 空间等能面为旋转椭球的三个半径。故椭球体积为：

$$V=\frac{4}{3}\pi abc=\frac{4\pi}{3h^3}(8m_lm_t^2)^{\frac{1}{2}}(E-E_c)^{\frac{3}{2}}$$

对应能量为 $E\to E+dE$ 范围内两椭球壳层之间体积为：

$$dV=\frac{dV}{dE}dE$$

即

$$dV=\frac{2\pi}{h^3}(8m_lm_t^2)^{\frac{1}{2}}(E-E_c)^{\frac{1}{2}}dE$$

设晶体体积为 $V$，则其量子态密度为 $2V$（考虑自旋），故在能量空间 d$V$ 体积内的量子态数为：

$$dZ=2V\frac{2\pi}{h^3}(8m_lm_t^2)^{1/2}(E-E_c)^{1/2}dE$$

∵导带极值在 $k$ 空间有 $S$ 个。

∴状态密度

$$g_c(E)\frac{dZ}{dE}=4\pi V\frac{S(8m_lm_t^2)^{1/2}}{h^3}(E-E_c)^{1/2}$$

令

$$S(8m_lm_t^2)^{1/2}=(2m_{dn})^{3/2}$$

则

$$m_{dn}=S^{2/3}(m_lm_t^2)^{1/3}$$

∴ $$g_c(E) = 4\pi V \frac{(2m_{dn})}{h^3}(E - E_c)^{1/2}$$

**例 8** 现有三块半导体硅材料，已知在室温下(300K)它们的空穴浓度分别为：$p_{01} = 2.25\times10^{16}/\text{cm}^3$，$p_{02} = 1.5\times10^{10}/\text{cm}^3$，$p_{03} = 2.25\times10^4/\text{cm}^3$。

(1)分别计算这三块材料的电子浓度 $n_{01}, n_{02}, n_{03}$；

(2)判别这三块材料的导电类型；

(3)分别计算这三块材料的费米能级的位置。

〔解〕 (1)设室温时硅的 $E_g = 1.12\text{eV}$，$n_i = 1.5\times10^{10}/\text{cm}^3$。根据载流子浓度乘积公式：$n_0 p_0 = n_i^2$ 可求出 $n_0 = \frac{n_i^2}{p_0}$

$$n_{01} = \frac{n_i^2}{p_{01}} = \frac{(1.5\times10^{10})^2}{2.25\times10^{16}} = 1\times10^4(1/\text{cm}^3)$$

$$n_{02} = \frac{n_i^2}{p_{02}} = \frac{(1.5\times10^{10})^2}{2.25\times10^{10}} = 1.5\times10^{10}(1/\text{cm}^3)$$

$$n_{03} = \frac{n_i^2}{p_{03}} = \frac{(1.5\times10^{10})^2}{2.25\times10^4} = 1\times10^{16}(1/\text{cm}^3)$$

(2)∵$p_{01} > n_{01}$ 即 $2.25\times10^{16} > 1\times10^4(1/\text{cm}^3)$，故为 p 型半导体。

$p_{02} = n_{02}$，即 $n_i = n_{01} = p_{01} = 1.5\times10^{10}/\text{cm}^3$，故为本征半导体。

$p_{01} < n_{02}$，即 $2.25\times10^4 < 1\times10^{16}(1/\text{cm}^3)$ 故为 n 型半导体。

(3)当 $T = 300\text{K}$ 时，$k_0T = 0.026\text{eV}$

由 $$p_0 = n_i \exp\left(\frac{E_i - E_F}{k_0T}\right)$$

得：

$$E_i - E_F = k_0T\ln\frac{p_0}{n_i}$$

对三块材料分别计算如下：

(i) $$E_i - E_F = 0.026\ln\frac{2.25\times10^{16}}{1.5\times10^{10}}$$
$$= 0.026\times14.2 = 0.37(\text{eV})$$

即 p 型半导体的费米能级在禁带中线下 0.37eV 处。

(ii)∵$n_{02} = p_{02} = n_i = 1.5\times10^{10}/\text{cm}^3$

∴$E_i - E_F = 0$ 即费米能级位于禁带中心位置。

(iii)对 n 型材料有 $$n_0 = n_i \exp\left(\frac{E_F - E_i}{k_0T}\right)$$

$$\therefore E_F - E_i = k_0T\ln\frac{n_0}{n_i} = 0.026\ln\frac{10^{16}}{1.5\times10^{10}}$$
$$= 0.026\times13.4 = 0.35\text{eV}$$

即对 n 型材料，费米能级在禁带中心线上 0.35eV 处。

**例 9** 若锗中杂质电离能 $\Delta E_D = 0.01\text{eV}$，施主杂质浓度分别为 $N_D = 10^{14}/\text{cm}^3$ 及 $10^{17}/\text{cm}^3$，计算(1)99%电离，(2)90%电离，(3)50%电离时温度各为多少？

〔解〕 未电离杂质占的百分比为：

$$D_- = \frac{2N_D}{N_c}\exp\frac{\Delta E_D}{k_0T}$$

求得：
$$\frac{\Delta E_D}{k_0T}=\ln\frac{D_-N_c}{2N_D}$$

$$\frac{\Delta E_D}{k_0}=\frac{0.01}{1.38\times10^{-23}}\times1.6\times10^{-19}=116$$

$$N_c=\frac{2(2\pi m_n^* k_0)^{3/2}}{h^3}T^{3/2}=2\times10^{15}(T^{\frac{3}{2}}/cm^3)$$

∴
$$\frac{116}{T}=\ln\frac{D_-N_c}{2N_D}=\ln\left(\frac{D_-\times2\times10^{15}\times T^{3/2}}{2N_D}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{10^{15}}{N_D}D_-T^{3/2}\right)$$

(1) $N_D=10^{14}/cm^3$　99%电离，即 $D_-=1-99\%=0.01$

$$\frac{116}{T}=\ln(10^{-1}T^{3/2})=\frac{3}{2}\ln T-2.3$$

即：
$$\frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T-2.3$$

将 $N_D=10^{17}/cm^3$，　$D_-=0.01$ 代入得：

$$\frac{116}{T}=\ln10^{4}T^{3/2}=\frac{3}{2}\ln T-4\ln10$$

即：
$$\frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T-9.2$$

(2) 90%时，$D_-=0.1$

$$N_D=10^{14}/cm^3\qquad\frac{\Delta E_D}{k_0T}=\ln\frac{0.1N_c}{2N_D}$$

$$\frac{116}{T}=\ln\frac{0.1\times2\times10^{15}}{2N_D}T^{\frac{3}{2}}=\ln\frac{10^{14}}{N_D}T^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T$$

$N_D=10^{17}/cm^3$ 得：$\frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T-3\ln10$

$$\frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T-6.9$$

(3) 50%电离不能再用上式

∵
$$n_D=n_D^+=\frac{N_D}{2}$$

即：
$$\frac{N_D}{1+\frac{1}{2}\exp\left(\frac{E_D-E_F}{k_0T}\right)}=\frac{N_D}{1+2\exp\left(-\frac{E_D-E_F}{k_0T}\right)}$$

∴
$$\exp\left(\frac{E_D-E_F}{k_0T}\right)=4\exp\left(-\frac{E_D-E_F}{k_0T}\right)$$

$$\frac{E_D-E_F}{k_0T}=\ln4-\frac{E_D-E_F}{k_0T}$$

即：
$$E_F=E_D-k_0T\ln2$$

$$n_0=N_c e-\frac{E_c-E_F}{k_0T}=\frac{N_D}{2}$$

取对数后得：

$$-\frac{E_c-E_D+k_0T\ln 2}{k_0T}=\ln\frac{N_D}{2N_c}$$

整理得下式：

$$-\frac{\Delta E_D}{k_0T}-\ln 2=\ln\frac{N_D}{2N_c}\quad\therefore\quad -\frac{\Delta E_D}{k_0T}=\ln\frac{N_D}{N_c}$$

即：

$$\frac{\Delta E_D}{k_0T}=\ln\frac{N_c}{N_D}$$

当 $N_D=10^{14}/cm^3$ 时，

$$\frac{116}{T}=\ln\frac{2\times10^{15}\times T^{3/2}}{10^{14}}$$

$$=\ln(20T^{\frac{3}{2}})=\frac{3}{2}\ln T+\ln 20$$

得：

$$\frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T+3$$

当 $N_D=10^{17}/cm$ 时：

$$\frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T-3.9$$

此对数方程可用图解法或迭代法解出。

(*A*)图解法：

令 $Y_1=\frac{116}{T}$，列下表：

| $T_1$ | 20K | 40K | 160K | 320K | 640K |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 5.8 | 1.45 | 0.725 | 0.36 | 0.18 |

(1) 99%电离时：$N_D=10^{14}/cm^3$ $\quad\frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T-2.3$

令 $y_2=\frac{3}{2}\ln T-2.3$，则：

$T=10K \quad T=320K$

$y_1=11.6 \quad y_1=0.36$

$y_2=1.15 \quad y_2=6.35$

求温度 $T=37.1K$，见图 3-5 所示。

$N_D=10^{17}/cm^3$ $\quad\frac{116}{T}=-\ln T-9.2$

令

$$y_2=\frac{3}{2}\ln T-9.2,$$

则：

$T=10K \quad T=320K$

$y_1=11.6 \quad y_1=0.36$

$y_2=5.75 \quad y_2=-0.55$

由 $y_1$ 和 $y_2$ 两条曲线相交求得 $T=533K$，以下解法均相同。

(2) 90%电离时：

$N_D=10^{14}/cm^3$ $\quad\frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T$

令 $\quad y_2=\frac{3}{2}\ln T \quad T=10K \quad T=80K$

$y_2=3.45 \quad y_2=6.57$

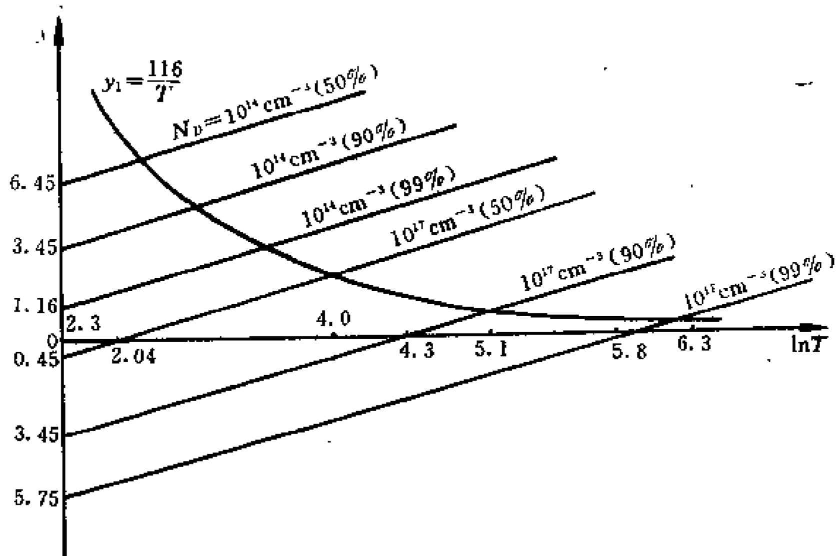



图 3-5

求得：$T=24.3K$

$$N_D=10^{17}/cm^3 \qquad \frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T-6.9$$

令 $$y_2=\frac{3}{2}\ln T-6.9$$

$$T=10K \qquad T=320K$$

$$y_2=3.45 \qquad y_2=1.75$$

求得：$T=160.5K$

(3)50%电离时

$$N_D=10^{14}/cm^3 \qquad \frac{116}{T}=-\ln T+3$$

令 $$y_2=\frac{3}{2}\ln T+3 \qquad T=10K \qquad T=20K$$

$$y_2=6.45 \qquad y_2=7.5$$

求得： $T=16K$

$$N_D=10^{17}/cm^3 \qquad \frac{116}{T}=-\ln T-3.9$$

令 $$y_2=\frac{3}{2}\ln T-3.9 \qquad T=10 \qquad 320$$

$$y_2=-0.45 \qquad 4.75$$

求得： $T=55K$

($B$)迭代法：

以 99%电离为例取 $N_D=10^{14}/cm^3$，得：

$$\frac{116}{T}=\frac{3}{2}\ln T-2.3$$

解出：$T=\dfrac{116}{\frac{3}{2}\ln T-2.3}$，列下表：

| $T_x^0$(K) | $\ln T_x$ | $T_{x+1}$ |
|---|---|---|
| 300 | 5.71 | 18.5 |
| 18.5 | 2.92 | 32.6 |
| 32.6 | 3.48 | 39.6 |
| 39.6 | 3.68 | 35.0 |
| 35.0 | 3.66 | 36.3 |
| 36.3 | 3.59 | 37.3 |
| 37.3 | 3.62 | 37.1 |
| 37.1 | 3.65 | 37.1 |

∴ $T=37.1$(K)，对其他情况可做类似处理。

**例 10** 在一掺硼的非简并 p 型硅中，含有一定浓度的铟，室温下测出空穴浓度 $p_0=1.1\times10^{16}/\text{cm}^3$。已知掺硼浓度 $N_{A1}=10^{16}/\text{cm}^3$ 其电离能 $\Delta E_{A1}=E_{A1}-E_v=0.046\text{eV}$，铟的电离能 $\Delta E_{A2}=E_{A2}-E_v=0.16\text{eV}$，试求这种半导体中含铟的浓度。室温下硅的 $N_v=1.04\times10^{19}/\text{cm}^3$。

〔解〕 对非简并 p 型硅：

$$p_0=N_v\exp\left(-\frac{E_F-E_v}{k_0T}\right)$$

$$E_F=E_v+k_0T\ln\frac{N_v}{p_0}$$

代入数据：

$$E_F=E_v+0.026\ln\frac{1.04\times10^{19}}{1.1\times10^{16}}$$

故：

$$E_F=E_v+0.178(\text{eV})$$

由图中可知：

$$E_F-E_{A1}=0.178-0.045=0.133\text{eV}$$

$$E_F-E_{A2}=0.178-0.16=0.018\text{eV}$$

价带空穴 $p_0$ 是由两种杂质电离后提供的，即

$$p_0=\frac{N_{A1}}{1+2\exp\left(\frac{E_{A1}-E_F}{k_0T}\right)}+\frac{N_{A2}}{1+2\exp\left(\frac{E_{A2}-E_F}{k_0T}\right)}$$

$$\therefore\quad N_{A2}=\left\{p_0-\frac{N_{A1}}{1+2\exp\left(\frac{E_{A1}-E_F}{k_0T}\right)}\right\}\cdot\left(1+2\exp\left(\frac{E_{A2}-E_F}{k_0T}\right)\right)$$

代入已知数据：

$N_{A2}=2.2\times10^{15}/\text{cm}^3$，即半导体中含铟的浓度为 $2.2\times10^{15}/\text{cm}^3$。

## 习 题

3—1 某半导体晶体电子等能面为椭球面，即 $E(k)=\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{k_1^2}{m_1}+\frac{k_2^2}{m_2}+\frac{k_3^2}{m_3}\right)$，试求：

(1)能量 $E\rightarrow E+\text{d}E$ 之间的状态数；

(2)计算导带中电子浓度 $n_0$。

3—2　一半导体硅样品，室温时施主与受主浓度之差为$(N_D-N_A)=10^{14}/cm^3$，设杂质均全部电离，问其费米能级位于何处？

3—3　计算本征硅在 100K，200K，1000K 温度下，由价带跃迁到导带的电子浓度。

3—4　如果半导体只含有浓度为 $N_D$ 的施主，当温度升高到

$$N_c=\frac{N_D}{2}e^{-\frac{3}{2}}\text{时}$$

求证：费米能量 $E_F$ 有最大值$(E_F)_{max}$，且

$$(E_F)_{max}=\frac{1}{2}(E_c+E_D)-\frac{3}{4}k_0T$$

3—5　一块 n 型半导体样品，施主浓度为 $N_D$，某种杂质恰好在该材料的禁带中心有单一的受主能级，结果此材料补偿后使 $n_0=n_i$，问掺杂浓度为多大？（不考虑$\frac{E_g}{2}$和 $E_i$ 的差别，$N_A=3N_D$）。

3—6　锌(Zn)在 Si 中是一双重受主，即每一个锌原子可以在图 3-6 所示较低的能级 $E_{A1}$上接受一个电子，在较高能级 $E_{A2}$上接受第二个电子，为了完全补偿一个 $N_D=10^{16}/cm^3$ 的 n-Si 样品，需要 Zn 原子浓度为多少？

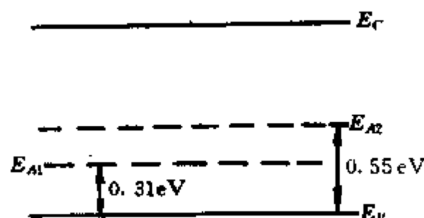


图 3-6

3—7　试证简并 n 型半导体绝对零度时的费米能级 $E_F$ 由下式表示：

$$E_F=\frac{h^2}{2m_n^*}\left(\frac{3n_0}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

设 $n_0=10^{17}/cm^3$，$m_n^*=0.07m_0$ 的半导体，开始简并时的温度等于多少？（设简并时 $E_c-E_F=0$）

3—8　掺磷浓度 $N_D=4\times10^{19}/cm^3$ 的 n-Si，在 300K 时 $E_F$ 位于导带下 0.026eV 处，求导带中电子浓度($n_0=8\times10^{18}/cm^3$)。

3—9　在一本征硅中，由于掺入了磷，结果在室温下费米能级提高了 0.13eV，问导带中电子占据各状态的几率提高了多少倍？导带中电子浓度提高了多少倍？(1484，148.3)

3—10　若以施主杂质电离 90%作为强电离的标准，试求掺 As 的 n-Ge 在室温时，以杂质电离导电为主的饱和区所掺杂质浓度的范围。设 As 在 n-Si 中电离能 $\Delta E_D=0.0127eV$ $(10^{14}\sim10^{16}/cm^3)$。

3—11　一个硅单晶样品其施主浓度 $N_D=2\times10^{14}/cm^3$；受主浓度 $N_A=10^{14}/cm^3$，电离能 $\Delta E_D=E_c-E_D=0.01eV$，试确定发生完全电离的温度。设 99%作为完全电离〔170K〕。

3—12　室温下，如果 p 型硅中，硼掺杂浓度增大 10 倍。试求 p 型硅中空穴和电子浓度变化的倍数以及费米能级 $E_F$ 的变化量(10 倍，$\frac{1}{10}$倍，$E_F$ 下降约 0.06eV)。

3—13　禁带宽度为 1.0eV 的本征半导体，假设 $m_p^*=5m_n^*$，求当温度为 600K，300K 时的费米能级位置。

3—14　某掺硼的 p 型硅(硼的电离能 $\Delta E_A=E_A-E_v=0.045eV$)，硼的浓度为 $4\times10^{19}/cm^3$，已知 300K 时费米能级在价带顶上面 0.019eV 处，求价带中空穴浓度。

3—15　某半导体硅样品中含磷浓度为 $10^{16}/cm^3$，含硼的浓度为 $2\times10^{15}/cm^3$。已知：在 $T=260K$ 时，本征载流子浓度 $n_i=2\times10^9/cm^3$，且费米能级 $E_F$ 与 $E_D$ 重合，求：

(1)未电离的施主浓度；

(2)多子浓度与少子浓度；

(3)设 $\mu_n=1300cm^2/V\cdot s$，$\mu_p=500cm^2/V\cdot s$，求该样品电导率。

3—16　有 n 型半导体，在温度 $T$ 时，$n_i\approx N_D$，试证明此时导带中电子浓度 $n_0$ 及价带中空穴浓度 $p_0$ 分别为：

$$n_0=\frac{1}{2}N_D[1+(1+\frac{4n_i^2}{N_D^2})^{\frac{1}{2}}]$$

$$p_0=\frac{2n_i^2}{N_D}[1+(1+\frac{4n_i^2}{N_D^2})^{\frac{1}{2}}]^{-1}$$

3—17　有 n 型硅样品含施主浓度 $N_D=10^{14}/cm^3$；求产生电子-空穴对数只有浓度的25%的温度 $T$。设 $n_i^2=Ae^{-\frac{a}{T}}$，$a=1.4\times10^4K$，$A=0.5\times10^{40}/cm^6(468K)$。

3—18　计算本征硅在 100K，200K，1000K 温度下由价带跃迁到导带的电子浓度。

3—19　一块 n 型硅电阻率为 $\rho$，若其费米能级 $E_F$ 移到 $E_i$ 另一边其对称的位置上，需要掺入何种类型杂质？掺多少？

3—20　室温下，掺磷的 n 型硅单晶施主能级与导带底距离 $\Delta E_D=E_c-E_D=0.044eV$，求室温下能使杂质基本电离(以 90%为标准)的最大杂质浓度。设 $N_c=2.8\times10^{19}/cm^3$。

3—21　(1)在 n 型锗中，施主浓度是锗原子密度的$\frac{1}{10^3}$，设电子的有效质量 $m_n^*=\frac{1}{2}m_0$($m_0$ 为电子真实质量)，求室温时 $E_F$ 的位置，已知：锗原子密度$=4.4\times10^{22}/cm^3$；

(2)当施主浓度为多少时，$E_F$ 与 $E_c$ 重合，设施主电离能为 0.013eV。

3—22　有 p 型锗，要使在室温下其费米能级与价带顶 $E_v$ 重合，所需掺杂浓度为多少？设 $m_p^*=0.4m_0$，电离能 $\Delta E_A=0.01eV$。

3—23　求证：施主浓度 $N_D=1.874\times10^{13}/cm^3$，受主浓度 $N_A=3.748\times10^{12}/cm^3$ 的硅单晶样品，在温度为 500K 时，该材料呈现本征导电导。设 $n_i=A_0T^3e^{-\frac{E_g}{k_0T}}$

3—24　如果 Au 在 Ge 中作为多重受主能级，每个 Au 原子可以接受 1～3 个电子，其能级位置分别在价带顶上方 0.15eV、0.50eV、0.66eV 处；如图 3-7 所示。假设 Ge 材料中除了含有 Au 外，还掺入某 $V$ 族浅杂质元素，其能级在导带底下方 0.01eV 处，若杂质浓度分别为：

(1)$N_{Au}=10^{14}/cm^3$，$N_V=0.75\times10^{14}/cm^3$；

(2)$N_{Au}=10^{14}/cm^3$，$N_V=2.5\times10^{14}/cm^3$；

(3)$N_{Au}=10^{14}/cm^3$；

$N_V=4.0\times10^{14}/cm^3$。

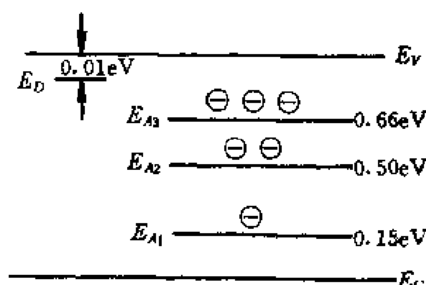


图 3-7

试分析 77K 时，上述三种不同掺杂材料的导电类型，并求出电子或空穴浓度。已知：$E_g=0.7eV$，$N_c=N_v=10^{13}/cm^3$；77K 时，$k_0T=0.007eV$。

3—25　设某半导体样品的本征载流子浓度有如下关系：

$$n_i^2=AT^3e^{-\frac{B}{T}}$$

对硅：$B=1400$，锗：$B=9100$；试求：在室温下，硅和锗的 $n_i^2$ 增长百分数。

3—26　对于 $p_0=a^2n_0$ 的 p 型半导体，证明：$n_i=\dfrac{aN_A}{a^2-1}$。

若定义非本征导电的温度上限为 $n_0=0.1p_0$ 时的温度。

证明：在此温度上限时 $n_i=0.35N_A$；

设：$N_A=4\times10^{16}/cm^3$，$N_D=3\times10^{16}/cm^3$，求 Ge 和 Si 非本征导电温度上限为多少？(Si：$T_{max}=585K$，Ge：$T_{max}=425K$)

3—27　若半导体中只含浓度为 $N_D$ 的施主(1)证明当温度升高到使导带底有效状态密度 $N_c=N_De^{-3/2}$时，费密能级有最大值；(2)此时温度及费密能级与施主浓度 $N_D$ 及施主电离能 $E_D$ 的关系如何？

3—28　室温时，某一半导体样品在平衡态情况下，受主浓度为 $10^{14}/cm^3$，施主浓度为 $2\times10^{13}/cm^3$。求：(1)净杂质浓度和导电类型；($8\times10^{13}/cm^3$，补偿 p 型)(2)本征载流子浓度($n_i\approx4.5\times10^{13}/cm^3$)。

3—29　有一本征半导体室温时(300K)其载流子浓度 $n_i=1.09\times10^{16}/cm^3$，当温度升至 400K 时，$n_i=5.21\times10^{16}/cm^3$，求该半导体的禁带宽度？当温度降至 200K 时，要保证材料为本征导电，其掺杂浓度的最大值为多少？设 $E_g$ 随温度的变化忽略不计。

# 第四章　半导体的导电性

## 内 容 提 要

(1)电子在热运动时不断受到晶格振动和杂质的散射作用,因而不断地改变运动方向。半导体中的主要散射机构是电离杂质散射和晶格振动散射,而晶格振动散射主要是以长纵光学波和长纵声学波为主。散射作用的强弱用散射几率 $P$(或平均自由时间 $\tau=\frac{1}{P}$)和平均自由程 $\bar{l}$ 来衡量。对不同的散射机构其散射几率 $P$ 可表示成:

电离杂质散射:$P_i \propto N_i T^{-\frac{3}{2}}$

式中,$N_i$ 为电离杂质浓度。

长纵声学波散射:$P_s \propto T^{\frac{3}{2}}$

长纵光学波散射:$P_0 \propto \frac{(h\nu_l)^{\frac{3}{2}}}{(k_0T)^{1/2}}\left[\frac{1}{\exp(\frac{k\nu_l}{k_0T})-1}\right]\frac{1}{f(\frac{h\nu_l}{k_0T})}$

式中,$h\nu_l$ 为声子能量。

其他因素引起的散射还有:等同能谷间的散射,位错散射,简并半导体的载流子之间的散射等。

(2)在单位电场强度作用下电子所获得的平均漂移速度叫做电子的漂移迁移率。在不考虑速度的统计分布时,迁移率与平均自由时间 $\tau$ 的关系为:

$$\mu=\frac{q\tau}{m_n^*}$$

对于多能谷半导体,式中 $m_n^*$ 应由电导有效质量 $m_c^*$ 代替。

引入迁移率后,半导体的电导率或电阻率公式可以表示成:

$$\sigma = n_0q\mu_n + p_0q\mu_p \qquad \text{或} \qquad \rho = \frac{1}{n_0q\mu_n + p_0q\mu_p}$$

对于各种具体情况,一般可以化成下面的表达式:

本征半导体: $n_0=p_0=n_i$　　$\rho=\frac{1}{n_iq(\mu_n+\mu_p)}$

n 型半导体: $n_0=N_D$　　$\rho=\frac{1}{N_Dq\mu_n}$

若补偿后,则 $n_0=N_D-N_A$　　$\rho=\frac{1}{(N_D-N_A)q\mu_n}$

p 型半导体:$p_0=N_A$　　$\rho=\frac{1}{N_Aq\mu_p}$

若补偿后,$p_0=N_A-N_D$　　$\rho=\frac{1}{(N_A-N_D)q\mu_p}$

(3)半导体电阻率不仅与掺杂浓度有关,而且对温度的变化亦很灵敏。在杂质电离起

主要作用时电阻率大致上随温度升高而增大，这是因为晶格散射使迁移率减少的缘故，在这个温度区内，$E_F$ 变化很大。到温度较高时，本征激发起主要作用，以致使 $n_i \gg N_D$（或 $n_i \gg N_A$），载流子数随 $T$ 指数增加，故电阻率随温度上升而指数下降。

(4)半导体在外加电磁场作用下，电子分布函数要发生变化。稳态时，满足的玻尔兹曼方程为：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s = v \cdot \nabla_r f + k \cdot \nabla_k f$$

如果系统内没有温度梯度，$f$ 不随 $r$ 变化，则可化为：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s = k \cdot \nabla_k f$$

一般求解这一微分-积分方程用弛豫时间近似的方法，即：

$$k \cdot \nabla_k f = -\frac{f - f_0}{\tau}$$

式中，$\tau$ 为弛豫时间。

考虑到载流子的速度统计分布以后，迁移率表达式修正为：

$$\mu = \frac{q\tau}{m_n^*} \frac{[\tau v^2]}{[v^2]}$$

(5)在强电场作用下，迁移率 $\mu$ 与场强 $E$ 有关。随着电场强度的增加，一般而言，漂移速度随电场增长的速率开始减慢，最后可达到一饱和数值，即饱和漂移速度。这一物理现象可以用过热载流子与晶格散射予以解释。

(6)由于 GaAs 材料导带具有双能谷结构，电子的谷间散射导致产生微分负电导现象。根据微分负阻理论可以对耿氏效应以较满意的解释。

## 问　题

4—1　试从经典物理和量子理论分别说明散射的物理意义。

4—2　根据散射的物理模型，说明为什么电离杂质使 Ge、Si 等原子半导体迁移率 $\mu \propto T^{\frac{3}{2}}$，而晶格振动散射使迁移率 $\mu \propto T^{-\frac{3}{2}}$？

4—3　比较并区别下述物理概念：电导迁移率，霍尔迁移率和漂移迁移率。

4—4　什么是声子？它对半导体材料的电导起什么作用？

4—5　强电场作用下，迁移率的数值与场强 $E$ 有关，这时欧姆定律是否仍然正确？为什么？

4—6　半导体的电阻温度系数是正的还是负的？为什么？

4—7　有一块本征半导体样品，试描述用以增加其电导率的两个物理过程。

4—8　如图 4-1 所示，说明 $\mu$-$T$ 曲线的变化规律，并指出在什么温度范围内电离杂质散射起主要作用，指出两根曲线为什么在极低温下分开，而在高温时趋于一致。

4—9　如果有相同电阻率的掺杂 Ge 和 Si 半导体，问哪一个材料的少子浓度高？为什么？

4—10　如果在非恒温的环境测量，发现工厂生产超纯硅的室温电阻率总是夏天低、冬天高。试述其原因，这与图 4-2 关系是否矛盾？为什么？

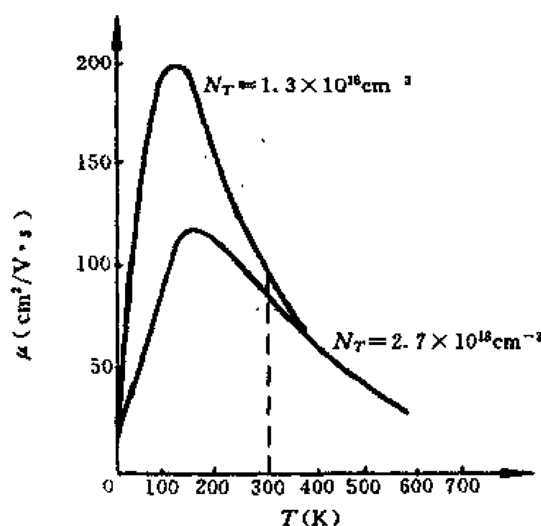



图 4-1

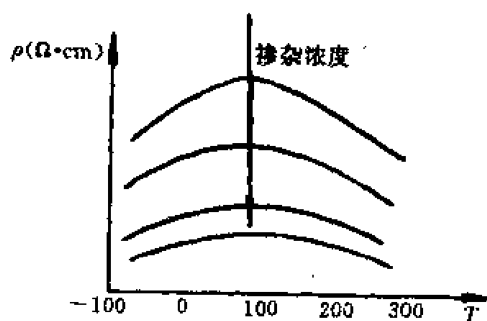



图 4-2

4—11　解释图 4-3 中曲线簇为什么在低温时发散，高温时集中？

4—12　解释图 4-4 中曲线 I 、II 哪条对应的掺杂浓度高？

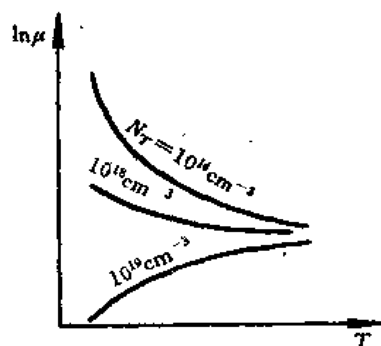



图 4-3

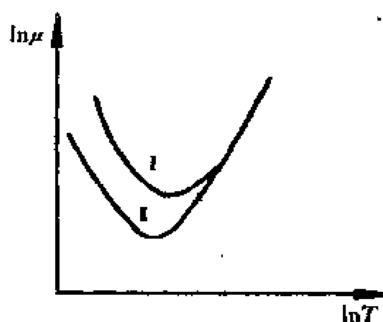



图 4-4

4—13　光学波散射和声学波散射的物理机构有何区别？各在什么样晶体中起主要作用？

4—14　说明本征 Ge 和 Si 中载流子迁移率温度增加如何变化？

4—15　电导有效质量和状态密度有效质量有何区别？它们与电子的纵有效质量和横有效质量的关系如何？

4—16　有二块不同纯度的 n 型 Si 单晶 $A$ 和 $B$，测得电导迁移率与温度 $T$ 关系如图 4-5。解释此曲线，并说明如何由曲线上迁移率极大值对应的温度判断样品的纯度。

4—17　解释图 4-6 中 $\rho$-$T$ 关系曲线(分 I 、II 、III 、IV 四个区域讨论)。

4—18　对于仅含一种杂质的锗样品，如果要确定载流子符号、浓度、迁移率和有效质量，应进行哪些测量？

4—19　解释多能谷散射如何影响材料的导电性？

4—20　为什么要引入热载流子概念？热载流子和普通载流子有何区别？

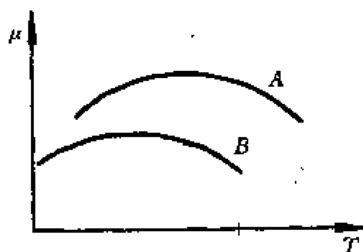



图 4-5

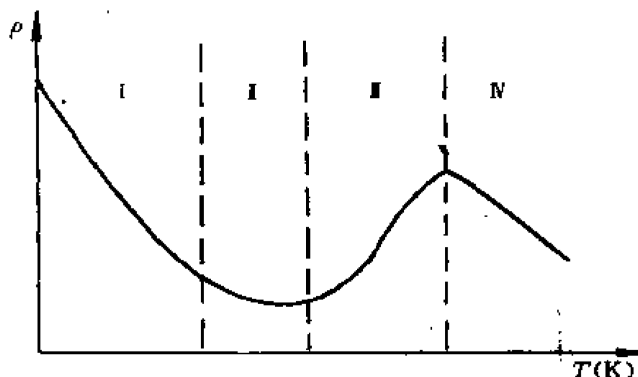



图 4-6

4—21　什么是负微分电导现象？以砷化镓为例说明之。

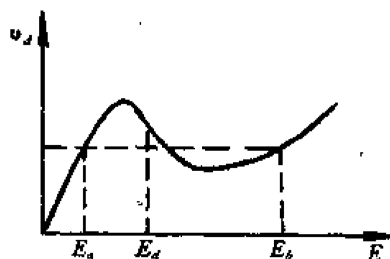



图 4-7

4—22　为什么当畴区电场降低到小于 $E_a$ 时，畴区电荷不再增加，而处于稳定状态？根据图 4-7 说明耿氏振荡的物理原理。

4—23　写出玻尔兹曼方程，并解释方程中每一项的物理意义。说明在什么条件下可以用弛豫时间近似。

4—24　说明方程 $N(t)=N_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ 中 $\tau$ 代表两次散射之间的平均时间。

4—25　假设 Ge 中电子($\mu_n=3900\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$)具有的热能量为 $k_0T$，相应的热运动速度用 $E_{th}=\frac{1}{2}m_0v_{th}^2$ 计算。若这种电子位于场强为 10V/cm 的电场中，说明此时电子的漂移速度小于热运动速度。若把这种电子放置到 $10^4$V/cm 的电场中，用同样的迁移率数值，计算强电场下对真实迁移率的影响。

4—26　给图 4-8(*a*)、(*b*)曲线予以定性解释，并根据(*a*)(*b*)曲线画出曲线(*c*)(设 n 型掺杂)。

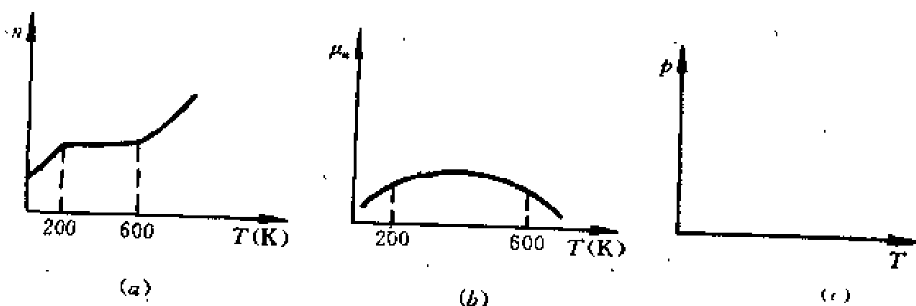



图 4-8

4—27　有四块 Si 半导体样品，除掺杂浓度不同外，其余条件均相同。根据下列所给数据判断哪块样品电阻率最大？哪块样品的电阻率最小？

(1)$N_A=1.2\times10^{13}/\text{cm}^3$，$N_D=8\times10^{14}/\text{cm}^3$；

(2)$N_A=8\times10^{14}/\text{cm}^3$，$N_D=1.2\times10^{15}/\text{cm}^3$；

(3) $N_A=4\times10^{14}/cm^3$;

(4) $N_D=4\times10^{14}/cm^3$。

## 解题示例

**例1** 室温下，本征锗的电阻率为 47Ω·cm，试求本征载流子浓度。若掺入锑杂质，使每 $10^6$ 个锗原子中有一个杂质原子，计算室温下电子浓度和空穴浓度。设杂质全部电离。锗原子的浓度为 $4.4\times10^{22}/cm^3$ 试求该掺杂锗材料的电阻率。设 $\mu_n=3600cm^2/V\cdot s$，$\mu_p=1700cm^2/V\cdot s$ 且认为不随掺杂而变化。$n_i=2.5\times10^{13}/cm^3$。

〔解〕 本征半导体的电阻率表达式为：

$$\frac{1}{\rho}=n_iq(\mu_n+\mu_p)$$

$$\therefore\quad n_i=\frac{1}{\rho q(\mu_n+\mu_p)}$$

$$=\frac{1}{47\times1.6\times10^{-19}\times(3600+1700)}$$

$$=2.5\times10^{13}(1/cm^3)$$

施主杂质原子的浓度 $N_D=(4.4\times10^{22})\times10^{-6}$

$$=4.4\times10^{16}(1/cm^3)$$

故 $$n_0=N_D=4.4\times10^{16}/cm^3$$

$$p_0=\frac{n_i^2}{n_0}=\frac{(2.5\times10^{13})^2}{4.4\times10^{16}}=1.42\times10^{10}(1/cm^3)$$

其电阻率 $$\rho_n=\frac{1}{n_0q\mu_n}$$

$$=\frac{1}{4.4\times10^{16}\times1.6\times10^{-19}\times3600}$$

$$\therefore\quad\rho_n=4\times10^{-2}\Omega\cdot cm$$

**例2** (1)试说明在室温下，某半导体的电子浓度 $n=n_i\sqrt{\mu_p/\mu_n}$ 时，其电导率 $\sigma$ 为最小值。式中 $n_i$ 是本征载流子浓度，$\mu_p$、$\mu_n$ 分别为空穴和电子的迁移率。试求在上面条件时空穴浓度。

(2)当 $n_i=2.5\times10^{13}/cm^3$，$\mu_p=1900cm^2/V\cdot s$，$\mu_n=3800cm^2/V\cdot s$ 时，试求锗的本征电导率和最小电导率。

(3)试问当 $n_0$ 和 $p_0$（除了 $n_0=p_0=n_i$ 以外）为何值时，该晶体的电导率等于本征电导率？

〔解〕 (1) $\because\quad\sigma=n_0q\mu_n+p_0q\mu_p$

又 $n_0p_0=n_i^2\quad\therefore\quad\sigma=n_0q\mu_n+\frac{n_i^2}{n_0}q\mu_p$

则 $\frac{d\sigma}{dn_0}=q\mu_n-\frac{n_i^2}{n_0^2}q\mu_p$　　令 $\frac{d\sigma}{dn_0}=0$ 得：

$$n_0=n_i\sqrt{\mu_p/\mu_n}$$

又 $\because\quad\frac{d^2\sigma}{dn_0^2}=2\frac{n_i^2}{n_0^3}q\mu_p>0$

∴ 当 $n_0=n_0\sqrt{\mu_p/\mu_n}$时，电导率 $\sigma$ 取得最小值。

空穴浓度 $p_0=\frac{n_i^2}{n_0}=n_i\sqrt{\mu_n/\mu_p}$

对本征锗：$\sigma_i=n_iq(\mu_n+\mu_p)$

$=2.5\times10^{13}\times1.6\times10^{-19}\times(1900+3800)$

$=2\cdot28\times10^{-2}(\mathrm{S/cm})$

(2)在最小电导率条件下：

$$\sigma_{min}=n_iq\sqrt{\mu_n/\mu_p}\cdot\mu_p+n_iq\sqrt{\mu_p/\mu_n}\cdot\mu_n$$

$$=2n_iq\sqrt{\mu_n\mu_p}$$

代入数据：

$$\sigma_{min}=2\times2.5\times10^{13}\times1.6\times10^{-19}\times\sqrt{3800\times1900}$$

$$=2.12\times10^{-2}(\mathrm{S/cm})$$

(3)当材料的电导率等于本征电导率时，有：

$$n_0q\mu_n+\frac{n_i^2}{n_0}q\mu_p=n_iq(\mu_n+\mu_p)$$

即 $$n_0^2\mu_n-n_0n_i(\mu_n+\mu_p)+n_i^2\mu_p=0$$

解得： $$n_0=\frac{n_i(\mu_n+\mu_p)\pm\sqrt{[n_i^2(\mu_n+\mu_p)^2-4\mu_n\mu_pn_i^2}}{2\mu_n}$$

代入数据： $$n_0=\frac{n_i}{4}(3\pm1)$$

∵ $n_0<n_i$ ∴ $n_0=\frac{n_i}{2}=1.25\times10^{13}/\mathrm{cm}^3$

$$p_0=\frac{n_i^2}{n_0}=5\times10^{13}/\mathrm{cm}^3$$

显然，此材料是 p 型材料。

**例 3** 已知本征锗的电导率在 310K 时为 $3.56\times10^{-2}\mathrm{S/cm}$，在 273K 时为 $0.42\times10^{-2}\mathrm{S/cm}$。一个 n 型锗样品，在这两个温度时，其施主杂质浓度 $N_D=10^{15}/\mathrm{cm}^3$。试计算在上述温度时掺杂锗的电导率。(设 $\mu_n=3600\mathrm{cm/V\cdot s}$, $\mu_p=1700\mathrm{cm/V\cdot s}$)

〔解〕 本征材料的电导率：

$$\sigma_i=n_iq(\mu_n+\mu_p)$$

$$\therefore\quad n_i=\frac{\sigma_i}{q(\mu_n+\mu_p)}$$

当 $T=310\mathrm{K}$ 时， $\sigma_i=3.56\times10^{-2}\mathrm{S/cm}$

$$n_i=\frac{3.56\times10^{-2}}{1.6\times10^{-19}\times(3600+1700)}$$

$$=42\times10^{12}(1/\mathrm{cm}^3)$$

当 $T=273\mathrm{K}$ 时， $\sigma_i=0.42\times10^{-2}\mathrm{S/cm}$

$$n_i=\frac{0.42\times10^{-2}}{1.6\times10^{-19}\times(3600+1700)}$$

$$=4.7\times10^{12}(1/\mathrm{cm}^3)$$

已知：$N_D=10^{15}/\mathrm{cm}^3$；则杂质全部电离后，$n_0=10^{15}/\mathrm{cm}^3$(略去 $n_i$ 影响)

则由 $n_0p_0=n_i^2$　　　可求得：$p_0=\frac{n_i^2}{n_0}$

当 $T=310\text{K}$ 时：　　$p_0=\frac{(42\times10^{12})^2}{10^{15}}$

$$=1.76\times10^{12}(1/\text{cm}^3)$$

$\therefore \sigma=n_0q\mu_n+p_0q\mu_p=1.6\times10^{-19}\times(10^{15}\times3600+1.76\times10^{12}\times1700)$

$$=5.76\times10^{-1}(\text{S/cm})$$

当 $T=273\text{K}$ 时：　　$p_0=\frac{(4.7\times10^{12})^2}{10^{15}}$

$$=2.2\times10^{10}(1/\text{cm}^3)$$

$\therefore \sigma=n_0q\mu_n+p_0q\mu_p$

$=1.6\times10^{-19}\times(10^{15}\times3600+2.2\times10^{10}\times1700)$

$=5.76\times10^{-1}(\text{S/cm})$

**例 4**　用本征硅材料制成的一个热敏电阻，在 290K 时的电阻值是 500Ω。设硅的禁带宽度 $E_g=1.12\text{eV}$，且认为不随温度变化，若假设载流子迁移率不变，试估计在 325K 时热敏电阻的近似值。

〔解〕　∵本征材料的电导率 $\sigma_i=n_iq(\mu_n+\mu_p)$，式中 $n_i$ 是本征浓度，$\mu_n$、$\mu_p$ 分别为电子和空穴的迁移率，若迁移率保持恒定不变，那么 $n_i$ 是唯一随温度 $T$ 变化的项。

$$n_i=(N_cN_v)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{E_g}{2k_0T}}=NT^{3/2}e^{-\frac{E_g}{2k_0T}}$$

式中，$N$ 是某个常数。

∴电阻 $R$ 按 $n_i^{-1}$ 的规律变化，即：$R=CT^{-3/2}e^{\frac{E_g}{2k_0T}}C$ 为另一个常数。

$$\therefore \qquad \frac{R_1}{R_2}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[\frac{E_g}{2k_0}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\right]$$

在 $T=290\text{K}$ 时，$R_1=500\Omega$

$$500=C(290)^{-\frac{3}{2}}\exp\left(\frac{1.12\times1.6\times10^{-19}}{2\times1.38\times10^{-23}\times290}\right)$$

$$=C(290)^{-3/2}\exp22.3$$

在 $T=325\text{K}$ 时，　　$R_2=C(325)^{-3/2}e^{19.9}$

$$\frac{R_2}{500}=\left(\frac{290}{325}\right)^{-3/2}e^{(19.9-22.3)}=0.076$$

$$\therefore \quad R_2\approx38.1(\Omega)$$

**例 5**　已知本征锗材料的电阻率随温度 $T$ 的变化可列表如下：

| $T$(K) | 385 | 458 | 556 | 714 |
|---|---|---|---|---|
| $\rho(\Omega.\text{cm})$ | 0.028 | 0.0061 | 0.0013 | 0.00027 |

假设 $E_g$ 与温度 $T$ 无关，电子和空穴迁移率 $\mu_n$、$\mu_p$ 均按 $T^{-\frac{3}{2}}$ 变化，求锗的禁带宽度 $E_g$。

〔解〕　　　　$\sigma_i=n_iq(\mu_n+\mu_p)$

$n_i\propto T^{3/2}e^{-\frac{E_g}{2k_0T}}$，考虑到迁移率 $\mu$ 随温度按 $T^{-\frac{3}{2}}$ 变化，则 $\sigma_i\propto e^{-\frac{E_g}{2k_0T}}$　　即　$\rho_i\propto e^{\frac{E_g}{2k_0T}}$

写成：　　　　$\rho_i=Ce^{\frac{E_g}{2k_0T}}$

式中，$C$ 为一个常数取对数后：

$$\ln\rho = \ln C + \frac{E_g}{2k_0T}$$

显然，根据假设可得到 $\ln\rho$ 与 $\frac{1}{T}$ 的关系曲线应该是一条斜率为 $\frac{E_g}{2k_0}$ 的直线。

| $T$(K) | 385 | 458 | 556 | 714 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{T}$(1/K) | $2.6\times10^{-3}$ | $2.18\times10^{-3}$ | $1.80\times10^{-3}$ | $1.40\times10^{-3}$ |
| $\ln\rho$ | $-3.58$ | $-5.10$ | $-6.65$ | $-8.21$ |

由题中所给数据可画出一直线，该直线的斜率为 3838，即 $\frac{E_g}{2k_0}=3838$。

$$\therefore\quad E_g = 2\times3838\times k_0 = 2\times3838\times\frac{1.38\times10^{-23}}{1.6\times10^{-19}}$$

$$=0.66(\text{eV})$$

**例 6** 试计算本征硅在室温时的电阻率。设电子和空穴迁移率分别为 $1350\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ 和 $500\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$，当掺入百万分之一的砷(As)后，设杂质全部电离，试计算其电导率比本征 Si 的电导率增大多少倍？

〔解〕 $\because\quad \sigma_i=n_iq(\mu_n+\mu_p)$

设 $\quad n_i=1.5\times10^{10}/\text{cm}^3$，代入已知数据后得：

$$\sigma_i=1.5\times10^{10}\times1.6\times10^{19}\times(1350+500)$$

$$=4.44\times10^{-6}(\text{S/cm})\quad (\text{S}=\frac{1}{\Omega})$$

已知硅的原子密度为 $5\times10^{22}/\text{cm}^3$

则掺入 As 的浓度为：

$$N_D=5\times10^{22}\times10^{-6}=5\times10^{16}(1/\text{cm}^3)$$

$\because$ 杂质全部电离 $\qquad\therefore\quad n_0=N_D=5\times10^{16}(1/\text{cm}^3)$

当杂质浓度 $N_i=5\times10^{16}/\text{cm}^3$ 时，电子迁移率为：

$$\mu_n=850(\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s})$$

忽略少子空穴对导电的贡献，故

$$\therefore\sigma=n_q(\mu_n)=5\times10^{16}\times1.6\times10^{-13}\times850$$

$$=6.8(\text{S/cm})$$

$$\therefore\sigma/\sigma_i=\frac{6.8}{4.44\times10^6}=1.53\times10^6$$

即电导率增大了 153 万倍。

**例 7** 在半导体锗材料中掺入施主杂质浓度 $N_D=10^{14}/\text{cm}^3$，受主杂质浓度 $N_A=7\times10^{13}/\text{cm}^3$；设室温下本征锗材料的电阻率 $\rho_i=60\Omega\cdot\text{cm}$，假设电子和空穴的迁移率分别为 $\mu_n=3800\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$，$\mu_p=1800\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$，若流过样品的电流密度为 $52.3\text{mA/cm}^2$，求所加的电场强度。

〔解〕 须先求出本征载流子浓度 $n_i$

$$n_i=\frac{\sigma_i}{q(\mu_n+\mu_p)}$$

$$=\frac{1}{60\times1.6\times10^{-19}\times(3800+1800)}$$

$$=1.86\times10^{13}(1/\text{cm}^2)$$

又∵

$$p_0+N_D^+=n_0+N_A^-$$

$$n_0p_0=n_i^2\quad 联立得：\quad n_0^2+(N_A-N_D)n_0-n_i^2=0$$

$$\therefore\quad n_0=-\frac{(N_A-N_D)}{2}+\frac{\sqrt{(N_A-N_D)^2+4n_i^2}}{2}$$

$$=\frac{3\times10^{10}}{2}+\frac{4.78\times10^{13}}{2}=3.89\times10^{13}(1/\text{cm}^3)$$

$$p_0=\frac{n_i^2}{n_0}=\frac{(1.86\times10^{13})^2}{3.89\times10^{10}}=8.89\times10^{12}(1/\text{cm}^3)$$

故样品的电导率

$$\sigma=q(n_0\mu_n+p_0\mu_p)$$

$$=1.6\times10^{-19}\times(3.89\times10^{13}\times3800+8.89\times10^{12}\times1800)$$

$$=2.62\times10^{-2}(\text{S/cm})$$

$$\therefore\quad E=\frac{J}{\sigma}=\frac{52.3\text{mA/cm}^2}{2.62\times10^{-2}/\Omega\cdot\text{cm}}$$

$$=1.996\times10^3\text{mA}\cdot\Omega/\text{cm}$$

即：$E=1.996\text{V/cm}$

**例 8** 试证 Ge 的电导有效质量为：

$$\frac{1}{m_c}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{m_t}+\frac{1}{m_l}\right)$$

〔证 1〕 设晶体立方轴为 $x,y,z$；$k$ 空间坐标轴为 $k_1,k_2,k_3$，且 $k_3$ 轴沿能量椭球的主轴方向。见图 4-9。对 Ge，$k_3$ 轴沿〔111〕方向；为计算方便，令 $u$ 为电场 $E$ 的单位矢量。

$a,b,c$ 为 $k_1,k_2,k_3$ 方向的单位矢量。见图 4-10。

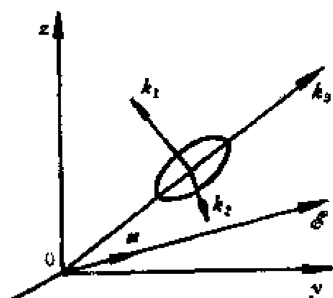


图 4-9

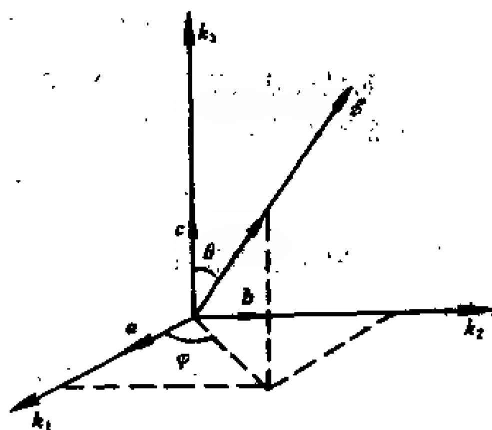


图 4-10

设 $u$ 对 $x,y,z$ 轴三个方向上投影为 $u_1,u_2,u_3$；$u$ 对 $k_1,k_2,k_3$ 三个方向的分量分别为 $u_1',u_2',u_3'$；将电场 $\varepsilon$ 投影到 $k_1,k_2,k_3$ 三个方向，则其分量为：

$$\varepsilon_{s_1}'=\varepsilon\sin\theta\cos\varphi$$

$$\varepsilon_{s_2}'=\varepsilon\sin\theta\sin\varphi$$

$$\varepsilon_{s_3}'=\varepsilon\cos\theta$$

在这三个电场分量作用下，$k_1$、$k_2$、$k_3$ 轴方向上的电流密度分别为：

$$J_a = n'\ \frac{q^2\tau}{m_1}\varepsilon'_{a_1} = n'\ \frac{q^2\tau}{m_1}\varepsilon a\cdot \boldsymbol{u};$$

同理：

$$J_b = n'\ \frac{q^2\tau}{m^2}\varepsilon b\cdot \boldsymbol{u}$$

$$J_c = n'\ \frac{q^2\tau}{m_3}\varepsilon c\cdot \boldsymbol{u}$$

式中，$n'$ 为单位体积中电子均分到四个能量椭球内的电子数。

即
$$4n' = n_0$$

∴ 总的电流密度为：

$$J = J_a + J_b + J_c$$
$$= n'\ q^2\tau\varepsilon\left[\frac{a\cdot \boldsymbol{u}}{m_1}a + \frac{b\cdot \boldsymbol{u}}{m_2}b + \frac{c\cdot \boldsymbol{u}}{m_3}c\right]$$

$J$ 沿电场 $E$(即 $u$ 方向上)分量：

$$J_u = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{u} = n'\ q^2\tau\varepsilon\left[\frac{(a\cdot \boldsymbol{u})^2}{m_1} + \frac{(b\cdot \boldsymbol{u})^2}{m_2} + \frac{(c\cdot \boldsymbol{u})^2}{m_3}\right]$$

Ge 极值附近等能面为一旋转椭球，其长轴沿〔111〕方向。

∴ $m_1 = m_2 = m_t$　　　　$m_3 = m_l$

又 $a\cdot \boldsymbol{u} = \sin\theta\cos\varphi$　　　　$b\cdot \boldsymbol{u} = \sin\theta\sin\varphi$

$c\cdot \boldsymbol{u} = \cos\theta$

故

$$J_u = J\cdot u = n'\ q^2\tau\varepsilon\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{m_t} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{m_t} + \frac{\cos^2\theta}{m_l}\right)$$
$$= n'\ q^2\tau\varepsilon\left(\frac{1-\cos^2\theta}{m_t} + \frac{\cos^2\theta}{m_l}\right)$$
$$= n'\ q^2\tau\varepsilon\left[\frac{1}{m_t} + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t}\right)(c\cdot \boldsymbol{u})^2\right]$$

∵ Ge 的能量椭球共有 8 个半椭球，合计为 4 个整椭球。

∴ 电流密度 $J_u$ 实际上应该对上式求和，即：

$$J_u = n'\ q^2\tau\varepsilon\sum_{1,2,3,4}\left[\frac{1}{m_t} + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t}\right)(c\cdot \boldsymbol{u})^2\right]$$

显然要解出 $J_u$ 主要是求出长轴与电场 $\varepsilon$ 的夹角余弦；这 8 个椭球主轴 $c$ 相对 $x$、$y$、$z$ 轴的方向余弦为：

$$c_1:\frac{1}{\sqrt{3}}[111]\quad,\quad \frac{1}{\sqrt{3}}[\bar{1}\bar{1}\bar{1}];$$

故 $(c_1\cdot u)^2 = \frac{1}{3}(u_1+u_2+u_3)^2$ 或 $\frac{1}{3}(-u_1-u_2-u_3)^2$；

$$c_2:\frac{1}{\sqrt{3}}[\bar{1}\bar{1}1]\quad,\quad \frac{1}{\sqrt{3}}[11\bar{1}]$$

故　$(c_2\cdot \boldsymbol{u})^2 = \frac{1}{3}(-u_1-u_2+u_3)^2$　或　$\frac{1}{3}(u_1+u_2-u_3)^2$

$$c_3:\frac{1}{\sqrt{3}}[\bar{1}1\bar{1}]\quad \frac{1}{\sqrt{3}}[1\bar{1}1]$$

故 $(c_3\cdot u)^2=\frac{1}{3}(-u_1+u_2-u_3)^2$ 或 $\frac{1}{3}(u_1-u_2+u_3)^2$

$c_4$: $\frac{1}{\sqrt{3}}[1\bar{1}\bar{1}]$ $\frac{1}{\sqrt{3}}[\bar{1}11]$

故 $(c_4\cdot u)^2=\frac{1}{3}(u_1-u_2-u_3)^2$ 或 $\frac{1}{3}(-u_1+u_2+u_3)^2$

按照二项式展开即得:

$$(c_1\cdot u)^2=\frac{1}{3}(u_1^2+u_2^2+u_3^2+2u_1u_2+2u_1u_3+2u_2u_3)$$

$$(c_2\cdot u)^2=\frac{1}{3}(u_1^2+u_2^2+u_3^2+2u_1u_2-2u_1u_3-2u_2u_3)$$

$$(c_3\cdot u)^2=\frac{1}{3}(u_1^2-u_2^2+u_3^2-2u_1u_2+u_1u_3-2u_2u_3)$$

$$(c_4\cdot u)^2=\frac{1}{3}(u_1^2+u_2^2+u_3^2-2u_1u_2-2u_1u_2+2u_2u_3)$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1,2,3,4}(c_i\cdot u)^2=\frac{4}{3}(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$$

$\because$ $u$ 为单位矢量, $\therefore$ $u_1^2+u_2^2+u_3^2=1$

$$\therefore \quad \sum_{i=1,2,3,4}(c_i\cdot u)^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad J_x=n'q^2\tau\varepsilon\left[\frac{4}{m_t}+\left(\frac{1}{m_l}-\frac{1}{m_t}\right)\frac{4}{3}\right]$$

$$=n'q^2\tau\varepsilon\left(\frac{8}{3m_t}+\frac{4}{3m_l}\right)$$

$$=\frac{4}{3}n'q^2\tau\varepsilon\left(\frac{2}{m_t}+\frac{1}{m_l}\right)$$

已知 $4n'=n_0$

$$\therefore \quad J_x=\frac{1}{3}n_0q^2\tau\varepsilon\left(\frac{2}{m_t}+\frac{1}{m_l}\right)$$

若令 $\frac{1}{m_c}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{m_t}+\frac{1}{m_l}\right)$

则 $$J_x=\frac{n_0q^2\tau\varepsilon}{m_c}$$

显然,锗的电导有效质量亦应为:

$$\frac{1}{m_c}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{m_t}+\frac{1}{m_l}\right)$$ 即得证。

注:在物理学问题中,常遇到一些与坐标方向有联系的量。例如:一个矢量 $E$ 有三个分量 $E_1$、$E_2$、$E_3$ 与坐标三个方向 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 对应。取另一坐标 $x_1'$、$x_2'$、$x_3'$;若 $x_i'=a_{ij}x_j$,则在新坐标中 $E$ 的三个分量 $E_1'$、$E_2'$、$E_3'$ 与 $E_1$、$E_2$、$E_3$ 间的关系为:

$$E_i'=a_{ij}E_j$$

当坐标变换时,按上面关系变化的物理量叫做一级张量(即矢量)。

对二级张量,考虑晶体中电流密度 $j$ 与电场强度 $E$ 的关系:

$$j_1=\sigma_{11}E_1+\sigma_{12}E_2+\sigma_{13}E_3$$

$$j_2=\sigma_{21}E_1+\sigma_{22}E_2+\sigma_{23}E_3$$

$$j_3 = \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3$$

显然 $j$ 与 $E$ 之间的关系要由九个量 $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$ 决定

当作坐标变换 $x_i' = a_{ij}x_j$ 时，在新坐标系中 $j$ 与 $E$ 的关系为：

$$j_1' = \sigma_{11}'E_1' + \sigma_{12}'E_2' + \sigma_{13}'E_3'$$

$$j_2' = \sigma_{21}'E_1' + \sigma_{22}'E_2' + \sigma_{23}'E_3'$$

$$j_3' = \sigma_{31}'E_1' + \sigma_{32}'E_2' + \sigma_{33}'E_3'$$

可以证明：

$$\sigma_{ij}' = a_{ik}a_{jl}\sigma_{kl}$$

任何一个物理量由 9 个分量组成，其中每一个分量都与二个坐标方向有联系，而当坐标变换时，按上式所表示的关系变换的物理量叫做二级张量。显然电导率 $\sigma_{ij}$ 为一个二级张量。此外，常遇到的二级张量还有有效质量张量，应力张量，应变张量等。

三级张量有 27 个分量，如描述晶体压电效应，即产生的极化强度 $p$ 与应力 $S_{jk}$ 间关系：

$$p_i = d_{ijk}S_{jk}$$

则　$d_{ijk}$ 为三级张量。

有关张量性质和运算法则可参阅有关专著。

若用电导率张量证明此题，可证明如下：

〔证 2〕 Ge 的导带极值能谷出现在〔111〕方向的布里渊区边界上，独立的能谷有 4 个（即 8 个 $\frac{1}{2}$ 合并为 4 个）。若晶体中电子密度为 $n_0$，则每一个能谷中的电子密度为 $\frac{n_0}{4}$；因为 4 个能谷相对立方晶体主轴对称，即绕〔001〕轴每转 90°后，可使它们彼此重合。因此只需把其中一个能谷的电导率张量变换到晶体主轴坐标系来，然后乘以 4 即得 4 个能谷的总贡献。

取〔111〕方向上的一个能谷，选取依属该能谷的坐标系，主轴方向为〔$\bar{1}$10〕〔$\bar{1}$ $\bar{1}$2〕〔111〕。其基矢分别为 $i,j,k$，它们与立方主轴基矢 $i'$，$j'$，$k'$ 之间的变换关系为：

$$\begin{vmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}$$

由对称变换：$\sigma_{ij} = 4a_{ik}a_{jl}\sigma_{kl}^{(s)}$（$s$ 指考虑的能谷）

对立方晶系有：$\sigma_{ij} = \sigma_{ii}\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sigma_{ij} & i \neq j \end{cases}$

即 $\sigma_{ij} = 0 (i \neq j)$ 只有 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$

∴　$$\sigma_{ii} = 4a_{ik}^2\sigma_{kk}$$

又　$$\sigma_{kk}^{(s)} = \frac{n^s q^2 \tau}{m_k}$$

∴ $$\sigma_u = 4n^5 q^2 \tau \left(\frac{1}{2m_t} + \frac{1}{6m_t} + \frac{1}{3m_l}\right)$$

∵ $$4n^s = n_0$$

故 $$\sigma_u = n_0 q^2 \tau \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{m_t} + \frac{1}{m_l}\right)$$

$$\equiv \frac{n_0 q^2 \tau}{m_c}$$

即得：

$$\frac{1}{m_c} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{m_t} + \frac{1}{m_l}\right)$$

其他方向上能谷依属的坐标系和立方晶体主轴方向间的变换关系分别为：

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

**例 9** 假设半导体晶体受到电场 $E$ 和磁场 $B$ 的作用，且 $E$ 在 $x$-$y$ 平面上，$B$ 沿 $z$ 方向，试计入磁场对电子的各级作用下，推导半导体电子在电磁场中的分布函数。

〔解〕 相空间中，玻耳兹曼方程为：

$$v \cdot \nabla_r f + a \cdot \nabla_v f = b - a$$

写作分量式，则为：

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + a_x \frac{\partial f}{\partial v_x} + a_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + a_z \frac{\partial f}{\partial v_z} = b - a \tag{1}$$

设电场在 $x$-$y$ 平面上，即 $E=(E_x, E_y, 0)$；同理磁场

$B=(0, 0, B_z)$

根据： $$F = ma = -q(\varepsilon + v \times B)$$

则有： $$ma_x = -q(\varepsilon_x + v_y B_z)$$

$$ma_y = -q(\varepsilon_y - v_x B_z)$$

$$ma_z = 0$$

从上式求出 $a_x$、$a_y$、$a_z$ 代入式(1)，并注意到电子所受的力方向只在 $x$-$y$ 平面上，$f$ 应与 $z$ 无关，式(1)则变为：

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{q}{m}(\varepsilon_x + v_y B) \frac{\partial f}{\partial v_x} - \frac{q}{m}(\varepsilon_y - v_x B) \frac{\partial f}{\partial v_y} = b - a \tag{2}$$

令 $$f = f_0 + v_x \varphi_1 + v_y \varphi_2 \tag{3}$$

$\varphi_1$，$\varphi_2$ 应为 $\varepsilon$，$B$，$v$ 和 $x$，$y$ 的函数。它在相空间中任一点的值与 $f_0$ 比较均为小量。那么，在弛豫时间近似中：

$$b - a = -\frac{f - f_0}{\tau} = -\frac{v}{l}(v_x \varphi_1 + v_y \varphi_2) \tag{4}$$

把式(3)、(4)代入式(2)，应用下列变换：

$$\frac{\partial}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial v_x} = m v_x \frac{\partial}{\partial E}$$

$$\frac{\partial}{\partial v_y}=\frac{\partial}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial v_y}=mv_y\frac{\partial}{\partial E}$$

式中，$E=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)$。

进行简化时，应考虑到 $\varphi_1,\varphi_2$ 是一个小量值函数，在外场不很强的情况下（弱场近似），可把 $\varepsilon_i$ 和 $\varphi_j$ 的乘积项以及 $\varphi_j$ 的微商项略去，但保留磁场 $B$ 的所有项，得到：

$$\begin{aligned}&v_x\frac{\partial f_0}{\partial_x}+v_y\frac{\partial f_0}{\partial_y}-\frac{\partial f_0}{\partial E}(v_xq\varepsilon_x+v_yq\varepsilon_y)\\&-(\frac{qv_y}{m}B\varphi_1-\frac{qv_x}{m}B\varphi_2)=-\frac{v}{l}(v_x\varphi_1+v_y\varphi_2)\end{aligned}\tag{5}$$

令式(5)中等号两边 $v_x,v_y$ 的系数分别相等，得：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f_0}{\partial_x}-q\varepsilon_x\frac{\partial f_0}{\partial E}=-\frac{v}{l}\varphi_1-\frac{q}{m}B\varphi_2\\&\frac{\partial f_0}{\partial_y}-q\varepsilon_y\frac{\partial f_0}{\partial E}=\frac{q}{m}B\varphi_1-\frac{v}{l}\varphi_2\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

式(6)是关于 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 的线性方程，令

$$f_1=\frac{\partial f_0}{\partial_x}-q\varepsilon_x\frac{\partial f_0}{\partial E},f_2=\frac{\partial f_0}{\partial_y}-q\varepsilon_y\frac{\partial f_0}{\partial E}$$

代入式(6)可写成：

$$\begin{aligned}&-\frac{v}{l}\varphi_1-\frac{q}{m}B\varphi_2=f_1\\&\frac{q}{m}B\varphi_1-\frac{v}{l}\varphi_2=f_2\end{aligned}\tag{7}$$

解方程(7)，并令

$$k=\frac{ql}{mv}B$$

得：

$$\varphi_1=-\frac{1}{v}\cdot\frac{f_1-kf_2}{k^2+1}=-\tau\frac{f_1-kf_2}{k^2+1}$$

$$\varphi_2=-\frac{1}{v}\cdot\frac{f_2+kf_1}{k^2+1}=-\tau\frac{f_2+kf_1}{k^2+1}$$

由 $f_1,f_2$ 和 $k$ 的定义式可知 $\varphi_1,\varphi_2$ 确为 $\varepsilon,B$ 和 $v$ 的函数，但由于在化简时，把 $\varphi_1\varphi_2$ 的微商项略去，故未能以显式表示它们与坐标的函数关系。把 $\varphi_1,\varphi_2$ 代回式(3)就得到电子在电磁场中的分布函数 $f$：

$$f=f_0-\tau v_x\frac{f_1-kf_2}{k^2+1}-\tau v_y\frac{f_2+kf_1}{k^2+1}$$

## 习　题

4—1　某硅半导体样品，在导带下 0.005eV 有一施主能级，其浓度为 $10^{16}/cm^3$；此外还有一深施主能级，其浓度为 $2\times10^{16}/cm^3$。试问室温下，深杂质能级必须在导带下多少电子伏时，深杂质能级对电导率的贡献是总的电导率的 50%？设：$E_g=1.12eV$，$N_c=2.8\times10^{19}/cm^3$，$n_i=1.5\times10^{10}/cm^3$，$\mu_n=1350cm^2/V\cdot s$。

4—2　有 n 型硅单晶样品，室温 $T_0$ 时测得其电阻率为 $0.5\Omega\cdot cm$。当温度升高到 $T_1$ 时测得电阻率减小为室温时的 $\frac{1}{10}$。试求 $T_0$ 及 $T_1$ 温度下的电子和空穴浓度？设 $\mu_n=$

$1350\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}, n_i=1.5\times10^{10}/\text{cm}^3$。

4—3 实验测得半导体 Ge 和硅材料在本征导电范围内，其电导率 $\sigma$ 和温度 $T$ 有如下关系：$\sigma_{Ge}\propto e^{-\frac{4350}{T}}$，$\sigma_{Si}\propto e^{-\frac{6456}{T}}$；设电子和空穴的有效质量均相同：求 Ge 和 Si 的禁带宽度。

4—4 利用下面给出的数据计算锗的禁带宽度

| $T(K)$ | 333 | 385 | 455 | 556 | 714 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma(\Omega^{-1},\text{cm}^{-1})$ | 7.4 | 36 | 164 | 770 | 4400〔0.71eV〕 |

4—5 求电阻率为 $0.25\Omega\cdot\text{cm}$ 的 p 型 IuSb 的电子和空穴浓度。

设：$\mu_n=7500\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}, \mu_p=750\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$，

$n_i=1.6\times10^{16}/\text{cm}^3$。

〔(1)$n_0=1.2\times10^{15}/\text{cm}^3, p_0=2.16\times10^{17}/\text{cm}^3$；

(2)$n_0=2.23\times10^{15}/\text{cm}^3, p_0=1.16\times10^{17}/\text{cm}^3$〕

4—6 某种半导体中掺入受主杂质，其浓度 $N_A=1.74\times10^{13}/\text{cm}^3$ 时，室温下使这种半导体的电导率取得极小值 $\sigma_{min}=2.09\times10^{-2}\text{s/cm}$；试求这种半导体在室温下电子和空穴的迁移率。设 $n_i=2.4\times10^{13}/\text{cm}^3$。〔$\mu_n=3.89\times10^3\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}, \mu_p=1.92\times10^3\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$〕。

4—7 用分子束外延技术制成的一种多层晶体，是由一层 GaAs 和 GaAlAs 交迭而成，每层晶体只有 50 多个原子层厚度。以硅作施主杂质，掺在 GaAlAs 中央部位。由于 GaAlAs 的禁带宽度比 GaAs 的大，结果使室温下 GaAs 中的载流子迁移率提高了一倍(与具有同样电子浓度的 n 型 GaAs 比较)。试问：

(1)GaAs 半导体是 n 型、p 型还是本征半导体？

(2)GaAs 中载流子迁移率提高的原因是什么？

4—8 一根 p 型锗棒长 1.2cm，宽 1mm，厚 0.5mm，其电阻为 240Ω，计算其掺杂浓度($N_A=3.3\times10^{15}/\text{cm}^3$)。

4—9 有 n 型半导体，导带极小值附近的等能面为旋转椭球面，如图 4-11 所示。其中 $k_1,k_2$ 两方向上的有效质量之比为 $m_1^*/m_2^*=3$，在与长半轴呈 30°角方向上加有电场 $E$，假设平均自由时间是各向同性的，求电流的方向。

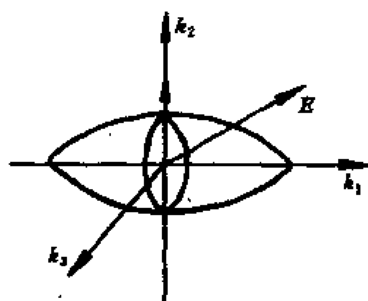


图 4-11

4—10 计入载流子速度统计分布以后，迁移率 $\mu_n=\frac{q}{m_n^*}\frac{[\tau v^2]}{[v^2]}$。

设：$\tau=B(E-E_c)^{\frac{3}{2}}$，$B$ 为常数。求：非简并情况下载流子的迁移率 $\mu_n$。

4—11 求证：有受主补偿的 n 型半导体的电导率满足下述关系：

$$\sigma=\frac{q}{2}\mu_n(N_D-N_A)(1+b)\left\{[1+\frac{4n_i^2}{(N_D-N_A)^2}]^{\frac{1}{2}}+\frac{1-b}{1+b}\right\}$$

式中，$b=\mu_p/\mu_n$。利用上式求轻度补偿时的电导率公式并简述电导率与掺杂浓度，温度的关系。

4—12 一般常用测定室温时的电阻率来估计半导体的杂质浓度，即认为 $N_D=\frac{1}{\rho q\mu_n}$，

若误差要求不大于 10%，试问对 n 型而言，电阻率至少应低于多少？（已知 $b=\mu_p/\mu_n=\frac{1}{2}$，$n_i=2.5\times10^{13}/\text{cm}^3$，$\mu_n=3900\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$）。

4—13　一根长 6mm，宽 1mm，厚 0.5mm 的 p 型锗样品，其电阻为 120Ω，设 300K 时，$\mu_n=1300\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$，$\mu_p=500\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$，$n_i=1.38\times10^{16}/\text{cm}^3$。试求：

(1)杂质浓度（$N_A=3.29\times10^{15}/\text{cm}^3$）；

(2)导带电子对电导率贡献所占的比例（$\frac{1}{8.4\times10^3}$）。

4—14　纯硅单晶在室温下其电阻率为 2000Ω·cm，电子浓度 $1.4\times10^{10}/\text{cm}^3$，计算样品在含有 $10^{15}/\text{cm}^3$ 受主和 $10^{17}/\text{cm}^3$ 施主时的电阻率。设空穴迁移率 $\mu_p$ 不随杂质浓度改变，且等于纯硅中电子迁移率的 0.26。

4—15　(1)已知一块锗样品在 300K 时施主原子浓度为 $2\times10^{14}/\text{cm}^3$，受主原子浓度为 $3\times10^{14}/\text{cm}^3$，试确定该样品中的电子和空穴浓度，这种样品的导电类型如何？

(2)设施主和受主的浓度相等，且均为 $10^{15}/\text{cm}^3$，求电子和空穴浓度，样品的导电类型。

(3)证明：当温度升至 400K 时，该样品基本为本征导电。

4—16　(1)求证：本征半导体电导率 $\sigma$ 随温度变化关系为

$$\frac{\text{d}\sigma}{\sigma}=\frac{\text{d}n_i}{n_i}=\left(\frac{3}{2}+\frac{E_{g0}}{2k_0T}\right)\frac{\text{d}T}{T}$$

(2)利用上面结果证明：温度每升高 1℃，则 Ge 和 Si 在室温时的导电率约增大 5.5% 与 8%，设迁移率 $\mu$ 与 $T$ 无关。

4—17　(1)如果在本征硅中每 $10^6$ 个硅原子掺入一个施主原子，求其电阻率。

(2)求温度每上升 1℃时导电率的百分增长率。

4—18　一个 10kΩ 的电阻器由两条相并联的 Ge 薄片做成。其中一条是本征锗，宽为 0.5mm；另一条是掺砷的锗，砷的浓度为 $10^{15}/\text{cm}^3$。两薄片的几何尺寸均为长 6mm，厚 40μm，但宽不相等，设在工作温度时，锗的 $n_i=2.5\times10^{13}/\text{cm}^3$，电子和空穴迁移率分别为 $4000\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$，$2000\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$；求掺砷锗的宽度（0.215mm）。

4—19　一般用四探针方法测定在外延层中 p 型杂质的掺杂纵向分布。当四个间隔相等的探针放在外延薄片表面时，两外侧探针流过的电流为 10mA，两内侧探针上测得的电压为 0.22V，求薄片的电阻率。若经过阳极氧化剥去 1μm 的薄层，用四探针测其电阻率，若探针电流稳定在 10mA，在第一层剥去之后，测出的电压为 0.55V，假设 $\mu_p=500\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$，求除去外延层的平均电阻率和平均杂质浓度是多少？

4—20　在厚 12μm 的 n 型外延层上，用四探针测得的电压电流曲线的斜率为 800Ω，试求：

(1)表面电阻（$36.2\Omega/\text{cm}^2$）；

(2)电阻率（435Ω·cm）；

(3)薄层的近似施主浓度，设电子迁移率为 $1300\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$。（$1.1\times10^{15}/\text{cm}^3$）。

4—21　(1)计算室温下砷化镓晶体导带上能谷和下能谷的有效状态密度的比值。设 $(m_n^*)_2=1.2m_0$，$(m_n^*)_1=0.068m_0$。

(2)假设上能谷和下能谷的电子浓度遵守玻尔兹曼分布，即

$\frac{n_2}{n_1}=\frac{N_2}{N_1}e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$，求室温下上、下能谷中电子浓度的比值。设 $\Delta E=0.36\text{eV}$。

(3)设电子在能谷中心底部具有动能为 $kT$，当电子跃迁到卫星能谷(即上能谷)后其平衡温度为多少?

4—22　设某砷化镓在时刻 $t$ 上能谷和下能谷电子浓度分别为 $n_2, n_1$

求证：当微分负电导发生时，(即$\frac{dJ}{dE}<0$)有下面关系式成立：

$$\frac{E(\mu_1-\mu_2)\frac{dn_1}{dE}+E(n_1\frac{d\mu_1}{dE}+n_2\frac{d\mu_2}{dE})}{n_1\mu_1+n_2\mu_2}<-1$$

式中，$\mu_1, \mu_2$ 分别为下能谷和上能谷的电子迁移率。

4—23　设电场沿[100]方向施加于 Ge 半导体样品，求电场同[111]方向极小值附近电子的加速度之间夹角，设电子有效质量 $m_l^*=1.6m_0, m_t^*=0.082m_0$。

4—24　硅原子作为杂质原子掺入砷化镓样品中，设杂浓度为 $10^{10}/\text{cm}^3$，其中5%硅原子取代砷，95%硅原子取代镓，若硅原子全部电离，本征激发可忽略不计，求样品的电导率($\mu_n=8800\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}, \mu_p=400\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$)。

4—25　一个用本征 Ge 做的热敏电阻，计算样品在100℃和27℃时电导率的比值，假设迁移率随 $T^{-3/2}$变化($T$ 为绝对温度)。

4—26　一纯硅做成的热敏电阻，其截面积为 $10^{-2}\text{cm}^2$，长为 0.3cm，已知室温时电子和空穴迁移率为 $1350\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ 和 $480\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$，随温度变化的迁移率均为：

$$\frac{\mu(T)}{\mu(300\text{K})}=(\frac{300}{T})^{2.6}$$

计算室温时和350K 时的电阻值。

4—27　求证等距四探针测电阻率公式为 $\rho=2\pi\frac{DV}{I}$。式中，$D$ 为探针的间距；$V$ 为探针2、3间的电压；$I$ 为探针1、2流过的电流。

4—28　室温下本征锗的电阻率为 $47\Omega\cdot\text{cm}$，迁移率比值为 $\mu_n/\mu_p=2$，试求室温下具有最大电阻率值的掺杂锗的导电类型?

4—29　某一硅样品掺磷浓度为 $2\times10^{10}/\text{cm}^3$，掺硼浓度为 $4\times10^{15}/\text{cm}^3$，掺金浓度为 $10^{15}/\text{cm}^3$，在室温下，求：(1)多子和少子浓度?

(2)费米能级的位置?

(3)电导率和少子寿命?

已知：$n_i=1.5\times10^{10}/\text{cm}^3, r_p=10^{-7}\text{cm}^3/\text{s}, q=1.6\times10^{-19}\text{C}$。

# 第五章　非平衡载流子

## 内容提要

(1)除去热激发外，还可以用其他方法(如光注入或电注入，高能粒子辐射等)使电子和空穴浓度超过热平衡时的数值 $n_0$ 和 $p_0$，把这种“过剩”的载流子称为非平衡载流子。这里的非平衡仅指数量上偏离平衡值，其能量分布与平衡分布相同。非平衡载流子是半导体器件工作中的一个极为重要的因素。

(2)非平衡载流子通过复合而消失，其平均存在的时间叫做寿命 $\tau$，它可以描写扰动撤除后平衡恢复的快慢，$1/\tau$ 表示了非平衡载流子的复合几率。寿命 $\tau$ 是半导体材料一个重要的“结构灵敏”参数。因此测量非平衡载流子寿命是鉴定半导体材料晶体质量的常规手段。

(3)注入停止后，非平衡载流子浓度随时间衰减的规律为：

$$\Delta p(t)=\Delta p_0 e^{-\frac{t}{\tau_p}} \quad \text{或} \quad \Delta n(t)=\Delta n_0 e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

式中，$\tau_p$ 和 $\tau_n$ 分别为空穴和电子的寿命，表示非平衡载流子浓度衰减至 $\frac{1}{e}$ 所需的时间。

(4)寿命 $\tau$ 的数值主要取决于载流子的复合，复合发生的微观过程主要分为直接复合和间接复合，体内复合和表面复合，辐射复合(发光复合)和俄歇复合等。

用复合中心理论(即间接复合)可以导出电子空穴的净复合率为：

$$u=\frac{N_t r_n r_p (np-n_i^2)}{r_n(n+n_1)+r_p(p+p_1)}$$

小注入时，间接复合的寿命公式可化为：

$$\tau=\frac{r_n(n_0+n_1)+r_p(p_0+p_1)}{N_t r_n r_p (n_0+p_0)}$$

式中：

$$n_1=N_c \exp(-\frac{E_c-E_t}{k_0T})$$

$$p_1=N_v \exp\frac{E_v-E_t}{k_0T}$$

显而易见，寿命 $\tau$ 与费米能级 $E_F$ 在禁带中的位置密切相关。对于强 p 型材料和强 n 型材料，小注入时寿命 $\tau$ 分别为：

$$\tau_n=\frac{1}{N_t r_n} \qquad \tau_p=\frac{1}{N_t r_p}$$

(5)在半导体表面完成的复合过程，就其复合机构来讲，仍然是间接复合，表面复合的强弱可以用表面复合速度 $S$ 描述，$S$ 直观而又形象地说明了由于表面复合而失去的非平衡载流子数目，就如同表面处的非平衡载流子($\Delta p$)。都以 $S$ 大小的垂直速度流出了表面。

单位面积的净表面复合率 $U_s=S[p_s(0)-p_{s0}]=S(\Delta p)$，

式中，$S=\sigma_+ v_T N_{st}$，$N_{st}$为表面复合中心浓度；$v_T$ 为载流子热运动速度；$\sigma_+$为空穴俘获截面。

(6)在非平衡情况下，为了与热平衡情况一样形象地描写载流子分布，引入了准费米能级的概念。用 $E_F^n$ 表示导带中电子的填充水平，用 $E_F^p$ 表示价带中空穴的填充水平，非平衡载流子的浓度公式可化为：

$$n=n_i e^{\frac{E_F^n-E_i}{k_0T}}$$

$$p=n_i e^{\frac{E_i-E_F^p}{k_0T}}$$

(7)非平衡载流子分布有浓度梯度时，发生扩散运动。其扩散定律为：

$$s_p=-D_p\frac{\mathrm{d}\Delta p}{\mathrm{d}x}\qquad s_n=-D_n\frac{\mathrm{d}\Delta n}{\mathrm{d}x}$$

式中，$D_p$、$D_n$ 分别为空穴和电子的扩散系数，单位为：cm²/s；稳态扩散时，非平衡载流子的分布为：

$$\Delta p(x)=\Delta p(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{L_p}}\qquad \Delta n(x)=\Delta n(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{L_n}}$$

式中，$L_p=\sqrt{D_p\tau_p}$，$L_n=\sqrt{D_n\tau_n}$分别为电子和空穴的扩散长度，表示了非平衡载流子在复合前，所能扩散深入的平均距离。

(8)迁移率 $\mu$ 是反映载流子在电场作用下运动难易程度的物理量，而扩散系数 $D$ 是反映有浓度梯度时载流子运动难易程度的物理量，因此两者之间应有一定的联系。其关系为：

$$D=\frac{k_0T}{q}\mu$$

此式即为爱因斯坦关系式。

(9)考虑到载流子浓度的各种变化因素，在一维情况下，

$$\frac{\partial p}{\partial t}=D_p\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\mu_p|E|\frac{\partial p}{\partial x}-\mu_p p\frac{\partial E}{\partial x}-\frac{\Delta p}{\tau_p}+g_p$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}=D_n\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+\mu_n|E|\frac{\partial n}{\partial t}+\mu_n n\frac{\partial E}{\partial x}-\frac{\Delta n}{\tau_n}+g_n$$

这就是漂移运动和扩散运动同时存在，并考虑到载流子的复合和产生诸因素后，少数载流子所遵守的运动方程，称为连续性方程。它反映了少数载流子运动的普遍规律，是研究半导体器件的基本方程之一。

## 问　题

5—1　区别半导体平衡状态和非平衡状态有何不同？什么叫非平衡载流子？什么叫非平衡载流子的稳定分布？

5—2　掺杂、改变温度和光照激发均能改变半导体的电导率，它们之间有何区别？试从物理模型上予以说明。

5—3　在平衡情况下，载流子有没有复合这种运动形式？为什么着重讨论非平衡载流子的复合运动？

5—4　为什么不能用费米能级作为非平衡载流子浓度的标准而要引入准费米能级？费米能级和准费米能级有何区别？

5—5　在稳定不变的光照下，半导体中电子和空穴浓度也是保持恒定不变的，但为什么说半导体处于非平衡状态？

5—6　一块 n 型半导体在强光本征激发下，导带电子和价带空穴均达到简并化，画出其准费米能级的位置，并写出电子和空穴浓度表达式。

5—7　说明非平衡载流子寿命的物理意义，非平衡载流子寿命长或短标志着什么？为什么说寿命是结构灵敏参数？说明 $\Delta p(t)=\Delta p_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ 中各项的物理意义。

5—8　区别平均自由时间，弛豫时间和非平衡少子寿命三个物理量。

5—9　根据寿命的基本概念证明：$\tau=\frac{1}{p}$；式中 $p$ 为非平衡载流子的复合几率。

5—10　说明直接复合，间接复合的物理意义。为什么深能级才能起最有效的复合中心作用？说明硅中掺金后寿命为什么会明显降低？

5—11　分别写出直接复合和间接复合过程的净复合率 $u$ 的表达式，并解释各项的物理意义。

5—12　根据费米能级位置填下面空白（大于、小于或等于）：

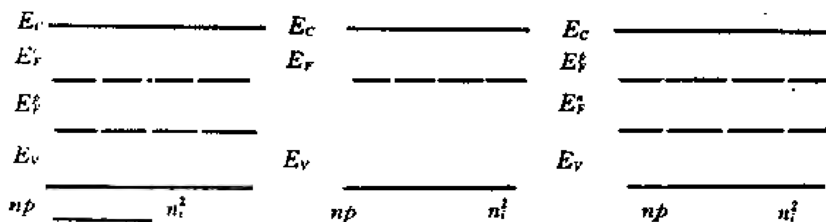



图 5-1

5—13　什么叫俄歇复合过程？画图说明俄歇复合可能发生的几种过程。根据细致平衡原理推导俄歇复合过程的净复合率表达式。

5—14　根据通过复合中心复合的普遍公式：

$$u=\frac{N_t r_n r_p (n_p-n_i^2)}{r_n(n+n_1)+r_p(p+p_1)}$$

证明位于禁带中央附近的深能级是最有效的复合中心（设 $r_n=r_p$）。讨论小注入时少子寿命与半导体的掺杂类型和掺杂浓度的关系。

5—15　根据在稳定时，杂质能级上的电子数为：

$$n_t=N_t\frac{nr_n+p_1r_p}{r_n(n+n_1)+r_p(p+p_1)}$$

证明：杂质能级与费米能级重合时，是最有利于陷阱作用。

5—16　区别：复合效应和陷阱效应，复合中心和陷阱中心，俘获和复合，俘获截面和俘获几率。

5—17　定性简述热平衡载流子和非平衡载流子的产生和运动规律的特点。

5—18　在 $t=0$ 时刻，注入的非平衡载流子的小信号撤销，求经过寿命 $\tau$ 这段时间里，被复合掉的非平衡少数载流子的浓度：

甲计算：

$$\int_0^\tau \frac{\Delta p}{\tau}dt = \Delta p \cdot \int_0^\tau \frac{1}{\tau}dt = \Delta p$$

乙计算：

$$\Delta p_0 - (\Delta p)_\tau = \Delta p_0 - (\Delta p_0 e^{-\frac{t}{\tau}})\Big|_{t=\tau}$$

$$= \Delta p_0(1 - \frac{1}{e})$$

试指出正误，并做说明。

5—19　介绍几种测量非平衡载流子寿命的方法和实验原理。

5—20　何谓表面复合？说明表面复合速度的物理意义。

5—21　为什么载流子处在热平衡状态(增加或欠缺)都是统计动力学的结果？请分别予以说明。

5—22　求证：在必须定义准费米能级的情况下，电子和空穴的准费米能级 $E_F^*$ 同费米能级 $E_F$ 的偏离为：

$$E_F^* - E_F = k_0T\ln\frac{n_0 + \Delta n}{n_0}$$

$$E_F - E_F^* = k_0T\ln\frac{p_0 + \Delta p}{p_0}$$

式中，$n_0$、$p_0$ 为热平衡载流子浓度；$\Delta n$、$\Delta p$ 为非平衡载流子浓度。

5—23　(1)连续性方程是什么物理定律的数学表达式？

(2)对于空穴，该方程左边为$\frac{dp}{dt}$，右边则有好几项，说明其中每一项各代表什么。

5—24　$D$、$\mu$、$\tau$、$L$ 四个参量之间的关系如何？检查他们各自的量纲和单位，讨论扩散系数与哪些物理量有关？

5—25　如何理解$\frac{D}{L}$代表扩散速度。

5—26　区别扩散长度，牵引长度和平均自由程这三个物理量。

5—27　如图 5-2 所示，$AB$ 能带倾斜，费米能级在同一水平线上，在这种情况下，是否存在：

(1)电子扩散流；

(2)电子漂移流；

(3)总电流。

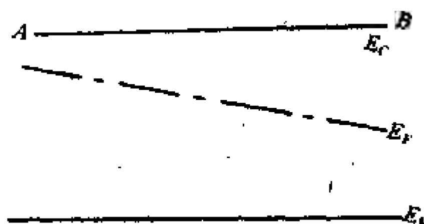


图 5-2

5—28　光辐射均匀地照射在半导体样品上，并达到稳态。当 $t=0$ 时光辐射撤去。(1)写出 $t\geqslant 0$ 时少子浓度与时间的函数关系。(2)给出描述该函数关系的方程中全部符号的定义。

5—29　光辐射照到一个开路的细长条半导体样品的一端：

(1)写出稳态时，少数载流子浓度与距离的函数关系；

(2)给出描述该函数关系的方程中的全部符号的定义；

(3)当小注入时，少数载流子电流的主要成因是漂移、扩散，还是二者兼而有之？

(4)多数载流子电流的主要成因是漂移、扩散，还是二者均有？

5—30　说明光电导测少子寿命的原理及实验方法。一块电阻率很高的 GaAs 单晶，其电子浓度 $n_0=4\times10^6/\mathrm{cm}^3$，空穴浓度 $p_0=3\times10^7/\mathrm{cm}^3$；样品经过仔细抛光，可以忽略表面复合的影响。试分析可否用光电导法测少数载流子的寿命。

5—31　图 5-3 为 p 型半导体在光照前后的能带图，问哪一个简图能正确地说明这一过程。

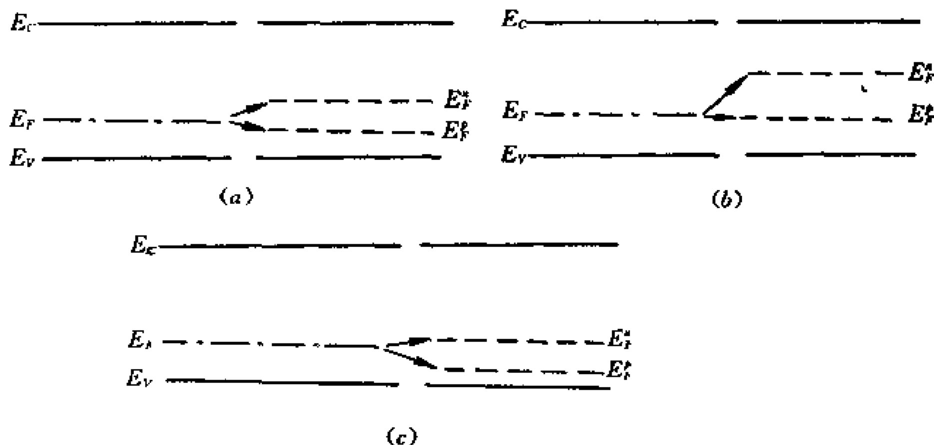



图 5-3

5—32　为什么在非均匀掺杂的半导体中必然存在电场？若某 n 型半导体由于非均匀掺杂使体内存在自建电场 $E(x)=-\dfrac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$；已知电子浓度分布为

$$n(x)=N_c\mathrm{e}^{\frac{E-qV(x)-E_F}{k_0T}}$$

试用平衡条件证明爱因斯坦关系式。

5—33　某非均匀掺杂半导体，其导带电子浓度在 $x$ 方向上线性变化，即 $n(x)=n_i(1+G_x)$

(1)设费米能级随 $x$ 变化而变，求电场 $E(x)$；

(2)如何保持样品处于热平衡状态？

(3)设 $N_A=ax$，$a$ 为常数，$N_D=N\mathrm{e}^{-ax}$，求其两种条件下的体内电场 $E(x)$，并画出两种条件下的能带图。

5—34　求证：禁带宽度为 $E_g$ 的半导体，其平衡载流子浓度的乘积 $pn$ 与禁带宽度为 $E_g-(E_F^n-E_F^p)$ 的半导体的平衡载流子浓度乘积 $p_0n_0$ 相等。

5—35　利用非平衡载流子公式：

$$\tau=\tau_{n_0}\frac{p_0+p_1}{n_0+p_0}+\tau_{p_0}\frac{n_0+n_1}{n_0+p_0}$$

求载流子寿命为最大值时的费米能级，并讨论少子寿命 $\tau$ 与费米能级位置的关系。

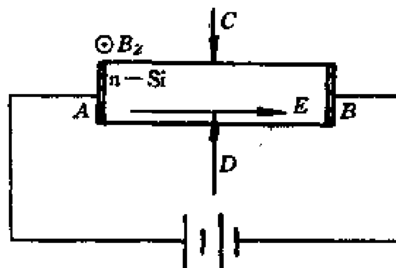



图 5-4

5—36　(1)由直接复合的定义确定电子留在导带和空穴留在价带的平均时间；

(2)载流子寿命和(1)中求得的平均时间有什么关系？由此关系分别讨论本征半导体和掺杂半导体。

5—37　如图 5-4 所示的样品，其两端加有恒定的电场 $E$，若在 $t_1 \sim t_2$ 时间内有一小信号电流注入，试定性地说明下列情况下载流子的输运情况。

(1)样品上有强电场 $E$，且有小信号注入电流；

(2)样品上有弱电场 $E$，且有小信号注入电流；

(3)在样品加有与纸面垂直的磁场 $B_z$，同时还加有弱电场 $E$，且有小信号注入电流。

## 解 题 示 例

**例 1**　某 p 型半导体掺杂浓度 $N_A=10^{16}/\mathrm{cm}^3$，少子寿命 $\tau_n=10\mu s$，在均匀光的照射下产生非平衡载流子，其产生率 $g=10^{18}/\mathrm{cm}^3\cdot s$，试计算室温时光照情况下的费米能级并和原来无光照时的费米能级比较。设本征载流子浓度 $n_i=10^{10}/\mathrm{cm}^3$。

〔解〕 (1)无光照时，空穴浓度

$$p_0=N_A=n_i e^{\frac{E_i-E_F}{T}}$$

$$\therefore\quad E_F=E_i-T\ln\frac{N_A}{n_i}=E_i-\frac{10^{16}}{10^{10}}$$

$$=E_i-0.026\times 6\times\ln 10 \text{ 即 } E_F=E_i-0.35(\mathrm{eV})$$

说明无光照时，费米能级在禁带中线下面 0.35eV 处。

(2)稳定光照后，产生的非平衡载流子为：

$$\Delta n=\Delta p=g_L\tau_n=10^{18}\times 10^{-5}=10^{13}(1/\mathrm{cm}^3)$$

$$\therefore\quad p=p_0+\Delta p=10^{16}+10^{13}\approx 10^{16}(1/\mathrm{cm}^3)$$

$$n=n_0+\Delta n=\frac{n_i^2}{N_D}+\Delta n=10^4+10^{13}$$

$$\approx 10^{13}(1/\mathrm{cm})$$

$$\because\quad p=n_i e^{\frac{E_i-E_F^p}{k_0T}}$$

$$\therefore\quad E_i-E_F^p=k_0T\ln\frac{p}{n_i}=0.026\ln\frac{10^{16}}{10^{10}}=0.36(\mathrm{eV})$$

$$n=n_i e^{\frac{E_F^n-E_i}{k_0T}}$$

$$\therefore\quad E_F^n-E_i=k_0T\ln\frac{n}{n_i}=0.026\ln\frac{10^{13}}{10^{10}}=0.18(\mathrm{eV})$$

上两式说明，$E_F^p$ 在 $E_i$ 之下，而 $E_F^n$ 在 $E_i$ 之上。且非平衡态时空穴的准费米能级和原来的费米能级几乎无差别，在电子的准费米能级相差甚远，如图 5-5 所示。

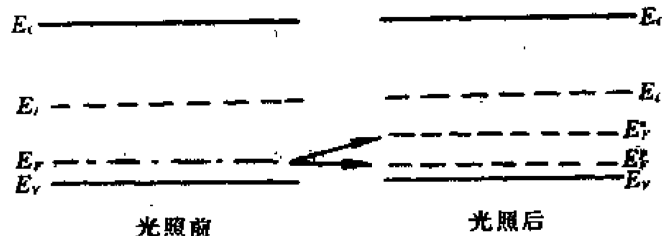



图 5-5

**例 2** 某 n 型半导体硅，其掺杂浓度 $N_D=10^{15}/cm^3$，少子寿命 $\tau_p=5\mu s$，若由于外界作用，使其少数载流子全部被清除（如反向偏压的 pN 结附近），试求此时电子-空穴的产生率是多大？设 $n_i=1.5\times10^{10}/cm^3$

〔解〕 ∵少子浓度 $p=0$

∴$\Delta_p=p-p_0=-p_0$

$p_0$ 为平衡时少子浓度

$p_0=\frac{n_i^2}{N_D}=\frac{(1.5\times10^{10})^2}{10^{15}}=2.3\times10^5/cm^3$

由此得到复合率

$$R=\frac{\Delta p}{\tau_p}=\frac{-p_0}{\tau_p}\approx\frac{-2.3\times10^5}{5\times10^{-6}}\approx-1.3\times10^{11}/cm\cdot s;$$

负的复合率代表电子-空穴的产生率。说明了在少子浓度为 0 的情况下，每秒钟每立方厘米产生 $1.3\times10^{11}/cm\cdot s$ 个电子-空穴对。

**例 3** 一掺铜的锗样品中含铜的浓度为 $10^{15}/cm^3$，含锑的浓度为 $10^{17}/cm^3$，其少子寿命在小注入条件下测得为 $10^{-7}/s$，设 $N_c=1.04\times10^{19}/cm$。试求：(1)锗中铜能级是否为电离态？

(2)若锗中空穴有效质量 $m_p^*=0.30m_0$（$m_0$ 为电子的自由质量），求空穴的俘获截面？

(3)随温度 $T$ 升高时，寿命 $\tau_p$ 是增加还是减少？

〔解〕 (1)铜在锗中是一个多能级杂质元素，在锗中产生三个受主能级，靠近导带最近的一个受主能级 $E_A$ 在导带下 0.26eV，即 $E_C-E_A=0.26eV$；根据杂质补偿可知，锗中电子浓度 $n_0=10^{17}/cm$（略去本征激发）。

$$\therefore \quad E_C-E_F=k_0T\ln\frac{N_C}{n_0}=0.026\ln\frac{1.04\times10^{19}}{10^{17}}=0.12(eV)$$

故在热平衡时，铜能级位于费米能级 $E_F$ 以下，铜能级上填满了电子，呈受主态，因此铜能级是电离状态（带负电）。

(2)空穴俘获系数 $\quad r_p=\frac{1}{N_t\tau_p}$

空穴俘获截面： $\quad \sigma_p=\frac{r_p}{v_t}=\frac{1}{N_tv_t\tau_p}$

式中，$v_t$ 为空穴的热运动速度。

$$v_t=\sqrt{\frac{3k_0T}{m_p^*}}=\sqrt{\frac{3\times0.026}{0.3m_0}}$$

式中，$m_0=9.1\times10^{-31}kg=0.568\times10^{-15}eV\cdot s^2/cm^2$，代入后

$$v_t=\sqrt{\frac{3\times0.026}{0.3\times0.568\times10^{-15}}}=2.2\times10^7(cm/s)$$

$$\therefore \quad \sigma_p=\frac{1}{2.2\times10^7\times10^{-7}\times10^{15}}=4.6\times10^{-6}(cm^2)$$

(3)随着温度增加，若不考虑 $N_t$ 的变化，显然 $T$ 增加引起 $v_t$ 增加。

$$\because \quad \tau_p=\frac{1}{N_tr_p}=\frac{1}{N_tv_t\sigma_p} \quad 即 \quad \tau_p\propto\frac{1}{v_t}$$

∴少子寿命减小。实际上随温度改变，$\frac{n_0}{n_t}$ 也是在改变的，但铜能是一个深能级，以致于

$n_t$ 变化甚微，所以略去了这一因素的影响。若陷阱能级（此题中的铜能级）不是很深，那么随温度上升，费米使级 $E_F$ 下降，$N_t$ 个陷阱能级上的电子数 $n_t$ 减小从而使 $\tau_p$ 上升，最后将趋于阻止热运动速度项的影响。这一点在硅材料中容易发现，即随温度上升少子寿命不是下降而是上升。

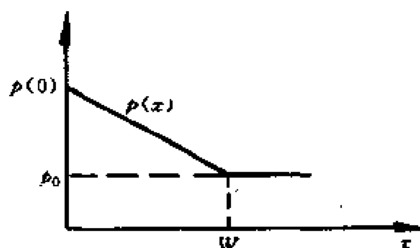


图 5-6

**例 4** 有一块半导体样品，它的空穴浓度如图 5-6 所示。

(1)求无外加电场时的空穴电流密度 $J_p(x)$的表示式，并画出曲线；

(2)设空穴浓度分布如图，若使净空穴电流为零，试求所需内电场的表示式，并画出曲线；

(3)若 $p(0)/p_0=10^3$，求 $x=0$ 和 $x=W$ 之间的电位差。

〔解〕 (1)由图中曲线我们可以写出空穴浓度 $p(x)$的表示式如下：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{p_0-p(0)}{W}+p(0)=kx+p(0) & 0<x<W\\ p_0 & x>W\end{cases}$$

式中：

$$k=\frac{p_0-p(0)}{W}<0$$

由于扩散形成的空穴电流密度：

$$J_p(x)=-qD_p\frac{dp}{dx}=\begin{cases}-qD_pk & 0<x<W\\ 0 & x>W\end{cases}$$

(2)加外电场 $E(x)$后则：

$$J_p=q\mu_pp(x)E-qD_p\frac{dp}{dx}=0\quad 时$$

$$E(x)=\frac{qD_p\dfrac{dp}{dx}}{q\mu_pp(x)}=\frac{1}{p(x)}\frac{D_p}{\mu_p}\frac{dp}{dx}$$

$$\therefore\qquad E(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p(x)}\dfrac{D_p}{\mu_p}k & 0<x<W\\ 0 & x>W\end{cases}$$

已知：$p(x)=kx+p(0)$，室温下的爱因斯坦关系

$$\frac{D_p}{\mu_p}=\frac{k_0T}{q}=0.026(\text{V})$$

代入后得：

$$E(x)=\begin{cases}\dfrac{0.026k}{kx+p(0)} & 0<x<W\\ 0 & x>W\end{cases}$$

曲线如图 5-7 所示。

(3)$x=0$ 到 $x=W$ 之间的电位差：

$$V=\int_0^W-\varepsilon dx$$

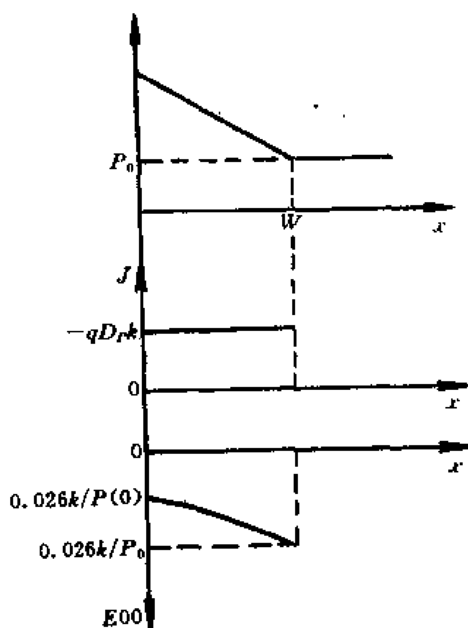



图 5-7

$$= -\int_0^W \frac{0.026k\mathrm{d}x}{kx + p(0)}$$
$$= -0.026\ln[kx + p(0)]\Big|_0^W$$
$$= -0.026[\ln p_0 - \ln p(0)] = -0.026\ln\frac{p_0}{p(0)}$$
$$= -0.026\ln 10^{-3} = 3 \times 0.026\ln 10 \approx 138.9(\text{mV})$$

**例 5** 设有受主浓度 $N_A=10^{15}/\text{cm}^3$ 的 p 型硅，其本征载流子浓度 $n_i=1.5\times10^{10}/\text{cm}^3$。若载流子注入在正 $x$ 区域内产生的非平衡电子浓度为 $n(x)=10^{17}\text{e}^{-2000x}$，求空穴浓度 $p(x)$，并计算在 $x=0$ 处电子浓度与空穴浓度的比值 $n/p$，说明是小注入还是大注入。

〔解〕 平衡的空穴浓度 $p_0=N_A=10^{15}/\text{cm}^3$

$$\text{电子浓度 } n_0=\frac{n_i^2}{p_0}=\frac{(1.5\times10^{10})^2}{10^{15}}$$
$$\approx 2.3\times10^5(1/\text{cm}^3)$$
$$\Delta p = p - p_0 = n - n_0 = \Delta n = 10^{17}\text{e}^{-2000x}$$
$$\therefore \quad p(x) = p_0 + 10^{17}e^{-2000x}$$
$$n(x) = n_0 + 10^{17}\text{e}^{-2000x}$$
$$x = 0 \text{ 处：}$$
$$p(0) = 10^{15} + 10^{17}$$
$$= 1.01 \times 10^{17}(1/\text{cm}^3)$$
$$n(0) = 10^{17} + 10^5 = 10^{17}(1/\text{cm}^3)$$

$\therefore \quad \dfrac{n(0)}{p(0)} = 0.99$ 显然为大注入情况(超过 0.05)。

**例 6** 设一均匀的 n 型 Si 样品，在左半部用一稳定的光照射(见图 5-8)，均匀产生电子-空穴对，产生率为 $g_0$，若样品足够长，试求稳态时样品两边的空穴浓度分布。

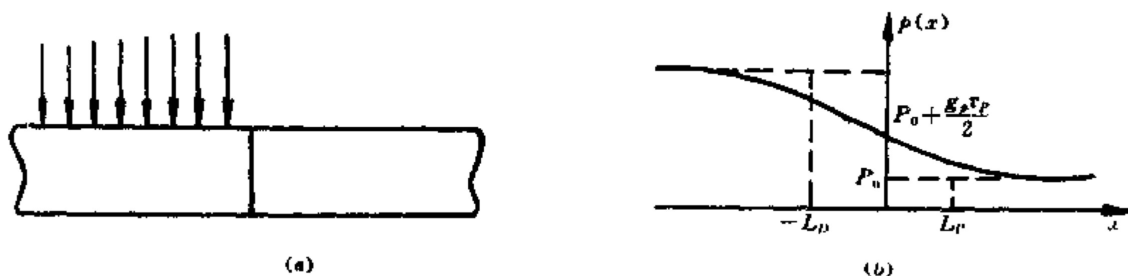



图 5-8

〔解〕 设左右分介处为

$$x=0$$

依题意，连续性方程可分段写为：

$$\frac{\partial p}{\partial t}=D_p\frac{d^2p}{dx^2}-\frac{p-p_0}{\tau_p}+g_0 \quad (x\leqslant 0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=D_p\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{p-p_0}{\tau_p} \quad (x\geqslant 0)$$

稳态时，$\frac{\partial p}{\partial t}=0$，得：

$$D_p\frac{d^2p}{dx^2}-\frac{p-p_0}{\tau_p}+g_0=0 \quad (x\leqslant 0) \tag{1}$$

$$D_p\frac{d^2p}{dx^2}-\frac{p-p_0}{\tau_p}=0 \quad (x\geqslant 0) \tag{2}$$

解式(1)得：
$$p(x)=p_0+g_0\tau_p+Ae^{-\frac{x}{L_p}}+Be^{\frac{x}{L_p}} \quad (x\leqslant 0) \tag{3}$$

解式(2)得：
$$p(x)=p_0+A_1e^{-\frac{x}{L_p}}+B_1e^{+\frac{x}{L_p}} \quad (x\geqslant 0) \tag{4}$$

式中，$L_p=\sqrt{\tau_pD_p}$

∵ $p(x)$为连续函数　　∴ $p(0^-)=p(0^+)$

且
$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{x=0^-}=\left(\frac{dp}{dx}\right)_{x=0^+} \tag{5}$$

∵ 样品足够大，$p(x)$在→∞时不可能成为无穷大

∴ 在 $x\leqslant 0$ 区域　　$A=0$

　 在 $x>0$ 区域　　$B_1=0$

根据连续性条件(5)得：

$$\frac{B}{L_p}=-\frac{A_1}{L_p} \qquad \therefore\ B=-A_1$$

∵ $p(0^+)=p(0^-)$　　∴ $A_1=g_0\tau_p+B=g_0\tau_p-A_1$

故
$$A_1=\frac{1}{2}g_0\tau_p, \quad B=-\frac{1}{2}g_0\tau_p$$

∴
$$p(x)=p_0+g_0\tau_p-\frac{1}{2}g_0\tau_pe^{\frac{x}{L_p}} \quad (x\leqslant 0)$$

$$p(x)=p_0+\frac{1}{2}g_0\tau_pe^{-\frac{x}{L_p}} \quad (x\geqslant 0)$$

其函数图形如图 5-8(b)所示。

**例 7** 用适当频率的方脉冲光照射到某 n 型半导体样品，被样品内部均匀吸收并产

生非平衡载流子，其产生率为 $g_p$，非平衡空穴的寿命为 $\tau_p$，光脉冲宽度 $\Delta t=3\tau_p$。

(1)试写出在该脉冲光开始照射到结束以后，非平衡空穴所满足的方程式；

(2)设 $t=0$(这时的 $\Delta p=0$)的瞬时，脉冲光开始照射，试求出脉冲开始到结束后的整个时间内，非平衡空穴随时间变化的规律，用图示意之；

(3)在用直流光电导衰减法测非平衡载流子寿命的试验中，在示波器上观察的是哪一段曲线？所谓寿命是指曲线上哪一段时间，由此如何定义非平衡载流子的寿命？

〔解〕 (1)设脉冲光开始照射的瞬间 $t=0$，则非平衡空穴所满足的方程为：

$$\frac{d\Delta p}{dt}=g_p-\frac{\Delta p}{\tau_p} \qquad (0\leqslant t\leqslant \Delta t) \tag{1}$$

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\Delta p}{\tau_p} \qquad (t\geqslant \Delta t) \tag{2}$$

(2)解式(1)：

$$\frac{d\Delta p}{dt}=\frac{g_p\tau_p-\Delta p}{\tau_p}$$

$$\frac{d(\Delta p-g_p\tau_p)}{\Delta p-g_p\tau_p}=-\frac{dt}{\tau_p}$$

$$\ln(\Delta p-g_p\tau_p)=-\frac{t}{\tau_p}+C$$

即：

$$\Delta p-g_p\tau_p=e^{-\frac{t}{\tau_p}+C}=C'\,e^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

当 $t=0$ 时，$\Delta p=0$ 代入得 $C'=-g_p\tau_p$

∴

$$\Delta p=g_p\tau_p(1-e^{-\frac{t}{\tau_p}}) \qquad (0\leqslant t<\Delta t)$$

解式(2)：

$$\Delta p=Ce^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

当

$$t=\Delta t \quad \Delta p(\Delta t)=g_p\tau_p(1-e^{-\frac{3\tau_p}{\tau_p}})$$

$$=g_p\tau_p(1-\frac{1}{e^3}) \qquad (0\leqslant t\leqslant \Delta t)$$

$$\Delta p(\Delta t)=Ce^{-\frac{3\tau_p}{\tau_p}}=Ce^{-3} \qquad (t\geqslant \Delta t)$$

由连续条件得：

$$g_p\tau_p(1-\frac{1}{e^3})=Ce^{-3}$$

$$C=\frac{g_p\tau_p(1-e^{-3})}{e^{-3}}$$

∴

$$\Delta p(t)=g_p\tau_p(e^3-1)e^{-\frac{t}{\tau_p}} \qquad (t\geqslant \Delta t)$$

故在 $0\leqslant t\leqslant \Delta t$ 时：

$$\Delta p(t)=g_p\tau_p(1-e^{-\frac{t}{\tau_p}})$$

(3)在用直流光电导衰减法测非平衡载流子寿命时，观察到的为 $3\tau_p$ 以后的那部分曲线。

当 $t=3\tau_p$ 时，$\Delta p(3\tau_p)=g_p\tau_p(1-e^{-3})=\Delta p_0$

当 $t=4\tau_p$ 时，$\Delta p(4\tau_p)=g_p\tau_p(e^3-1)e^{-4}$

$$=\frac{g_p\tau_p(1-e^{-3})}{e}=\frac{\Delta p_0}{e}$$

故所谓寿命是指 $3\tau_p$ 到 $4\tau_p$ 曲线对应的时间(如图 5-9 所示)。

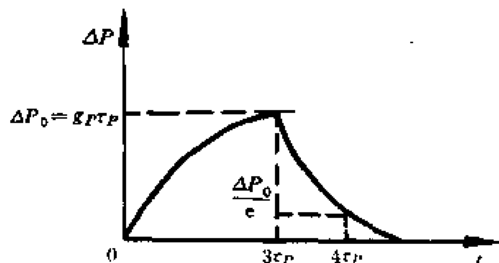



图 5-9

**例 8** 在一块 p 型半导体中，有一种复合-产

生中心，小注入时被这些中心俘获的电子发射回导带的过程和它与空穴复合的过程有相同的几率。试求这种复合-产生中心的能级位置，并说明它能否成为有效的复合中心？

〔解〕 设

$$n_1 = N_c e^{-\frac{E_c - E_t}{k_0 T}}$$

过程中产生的电子数$=s_- \cdot n_t, s_- = r_n n_1$ 为电子激发几率。

$E_t$ 能级上的电子发射回价带的数目，即 $E_t$ 能级俘获空穴数目$=r_p p n_t$。$r_p$ 为空穴俘获几率。

由题设条件知：$s = r_n n_1 = r_p p$

对于一般复合中心： $r_n \approx r_p$ （或相差甚小）

∴ 小注入条件下，由 $n_1 = p = p_0 + \Delta p$ 可得：

$$n_1 \approx p_0$$

即

$$N_c e^{\frac{E_t - E_c}{k_0 T}} = N_v e^{\frac{E_v - E_F}{k_0 T}}$$

故

$$E_t = E_c + E_v - E_F - k_0 T \ln \frac{N_c}{N_v}$$

∵ 本征费米能级 $E_i = \frac{1}{2}(E_c + E_v - k_0 T \ln \frac{N_c}{N_v})$

∴ $E_t = 2E_i - E_F$ 可写成：

$$E_t - E_i = E_i - E_F$$

一般 p 型半导体室温下 $E_F$ 远在 $E_i$ 之下。所以，$E_t$ 远在 $E_i$ 之上；故 $E_t$ 不是有效复合中心。

**例 9** 光照一个 $1\Omega \cdot cm$ 的 n 型硅样品，均匀地产生非平衡载流子，电子-空穴对的产生率为 $10^{17}/cm^3 \cdot s$。设样品的寿命为 10μs，表面复合速度为 100cm/s。试计算：

(1)单位时间单位表面积在表面复合的空穴数；

(2)单位时间单位表面积在离表面三个扩散长度中体内复合掉的空穴数。

〔解〕 (1)设单位时间单位表面积在表面复合的空穴数即复合率 $u_s$ 为：

$$u_s = s_p [p(x) - p_0]|_{x=0}$$

$s_p$ 为表面复合速度。

又

$$p(x) = p_0 + \tau_p g_p (1 - \frac{s_p \tau_p}{L_p + s_p \tau_p} e^{-\frac{x}{L_p}})$$

在 $x=0$ 处，$p(0) - p_0 = \tau_p g_p (1 - \frac{s_p \tau_p}{L_p + s_p \tau_p})$

对 $\rho = 1\Omega \cdot cm$ 的 n-Si

查表得： $N_D = 5 \times 10^{15}/cm^3, \mu_p = 400(cm^2/V \cdot s)$

∴ $L_p = \sqrt{\frac{k_0 T}{q} \mu_p \tau_p} = \sqrt{\frac{1}{40} \times 400 \times 10 \times 10^{-6}}$

$= 10^{-2}(cm)$

代入上式后得：

$$p(0) - p_0 = 10 \times 10^{-6} \times 10^{17} \times (1 - \frac{100 \times 10^{-6} \times 10}{10^{-2} + 100 \times 10^{-6} \times 10})$$

$$= 10^{12}(1 - \frac{10^{-3}}{10^{-2} + 10^{-3}})$$

$\therefore$ $$p(0)-p_0=0.91\times10^{12}(1/\text{cm}^3)$$

故 $$u_s=s_p[p(0)-p_0]=0.91\times10^{12}\times100$$
$$=9.1\times10^{13}(1/\text{cm}^2\cdot\text{s})$$

(2)求 $\Delta p=\int_0^{3L_p}p(x)\mathrm{d}x-\int_0^{3L_p}p_0\mathrm{d}x$

又 $p(x)=p_0+\tau_p g_p[1-\frac{s_p\tau_p}{L_p+s_p\tau_p}e^{-\frac{x}{L_p}}]$

$\therefore$ $$\Delta p=\int_0^{3L_p}\tau_p g_p(1-\frac{s_p\tau_p}{L_p+s_p\tau_p}e^{-\frac{x}{L_p}})\mathrm{d}x$$
$$=3\tau_p g_p L_p+\frac{g_p s_p\tau_p L_p}{L_p+s_p\tau_p}e^{-\frac{x}{L_p}}\Big|_0^{3L_p}$$

代入数据得：

$$\Delta p=3\times10\times10^{-6}\times10^{17}\times10^{-2}+\frac{10^{17}\times100\times(10\times10^{-6})^2\times10^{-2}}{10^{-2}+10^2\times10\times10^{-6}}(e^{-3}-1)$$
$$=2.9\times10^{10}(1/\text{cm}^2)$$

故单位时间复合掉的空穴数为：

$$\frac{\Delta p}{\tau}=\frac{2.9\times10^{10}}{10^{-5}}=2.9\times10^{15}(1/\text{cm}^2\cdot\text{s})$$

**例10** 一块掺施主浓度为 $2\times10^{16}/\text{cm}^3$ 的硅片，在 920℃下掺金到饱和浓度。然后经氧化等处理，最后此硅片的表面复合中心为 $10^{10}/\text{cm}^2$。

(1)计算体寿命，扩散长度和表面复合速度；

(2)如果用光照射硅片并被样品均匀吸收，电子-空穴对的产生率为 $10^{11}/\text{cm}^3\cdot\text{s}$，试求表面处的空穴浓度以及流向表面的空穴流密度是多少？

〔解〕 认为复合中心 $N_t$ 分布是均匀的，则由表面复合中心可求得：

$$N_t=10^{15}/\text{cm}^3$$

(1)体寿命 $$\tau=\frac{1}{r_p N_t}$$

已知金的空穴俘获率 $r_p=1.15\times10^{-7}\text{cm}^3/\text{s}$

$$N_t=10^{15}/\text{cm}^3$$

代入得： $$\tau=\frac{1}{1.15\times10^{-7}\times10^{15}}=8.7\times10^{-9}(\text{s})$$

又因为迁移率 $\mu_p$ 与总的杂质浓度有关。

$$N_i=N_D+N_t=2\times10^{16}+10^{15}=2.1\times10^{16}/\text{cm}^3$$

由图 4-14 查得：

$$\mu_p=350(\text{cm}^2/\text{V.s})$$

$\therefore$ $$D_p=\frac{k_0T}{q}\mu_p=\frac{1}{40}\times350=8.75(\text{cm}^2/\text{s})$$

故扩散长度：

$$L_p=\sqrt{D_p\tau_p}=\sqrt{8.75\times8.7\times10^{-9}}$$
$$=2.76\times10^{-4}(\text{cm})$$

表面复合速度：

$$s_p=r_pN_{st}=1.15\times10^{-7}\times10^{10}=1.15\times10^3(\text{cm/s})$$

(2) ∵ $p(x)=p_0+\tau_p g_p(1-\frac{s_p\tau_p}{L_p+s_p\tau_p}e^{-\frac{x}{L_p}})$

$p_0=\frac{n_i^2}{n_0}$

∵ 金在 n 型 Si 中起受主作用

∴ $n_0=N_D-N_t=1.9\times10^{16}/cm^3$

故 $p_0=\frac{n_i^2}{1.9\times10^{16}}=\frac{(1.5\times10^{10})^2}{1.9\times10^{16}}=1.18\times10^4/cm^3$

∴ 在 $x=0$ 处

$$p(0)=p_0+\tau_p g_p(1-\frac{s_p\tau_p}{L_p+s_p\tau_p})$$

代入数据得：

$$\begin{aligned}p(0)&=1.18\times10^4+8.7\times10^{-9}\times10^{17}\\&\times(1-\frac{1.15\times10^3\times8.7\times10^{-9}}{2.76\times10^{-4}+1.15\times10^3\times8.7\times10^{-9}})\\&=1.18\times10^4+8.7\times10^{-9}\times10^{17}\\&\times(1-\frac{1.15\times8.7\times10^{-6}}{2.76\times10^{-4}+1\times10^{-5}})\\&=1.18\times10^4+8.7\times10^8\times(1-0.035)\\&=1.18\times10^4+8.7\times10^8\times0.965\\&=1.18\times10^4+2.16\times10^8\\&=8.4\times10^8(1/cm^3)\end{aligned}$$

故根据表面复合速度的物理意义，可求得流向表面的空穴流密度为：

$$J_p=s_p(p(0)-p_0)$$

代入数据得：

$$\begin{aligned}J_p&=1.15\times10^3\times(8.4\times10^8-1.18\times10^4)\\&=9.66\times10^{11}(1/cm^2\cdot s)\end{aligned}$$

## 习 题

5—1 某含磷浓度为 $5.5\times10^{16}/cm^3$ 的硅薄膜，经光照后，电导率增加了一倍。计算光照后产生的非平衡载流子浓度 $\Delta n$ 和 $\Delta p$ 各是多少？

($\Delta n=4.03\times10^{16}/cm^3$，$\Delta p=4.03\times10^{16}/cm^3$)

5—2 已知某 p-Si 样品在温度 $T$ 时，$J_p=30mA/cm^2$；在样品右端($x=0$)处，其电流密度的 $\frac{1}{2}$ 由电导产生，而另外 $\frac{1}{2}$ 由扩散而致，空穴分布函数为：$P(x)=10^{14}+10^{12}e^{-\alpha x}$，$\alpha=10^4/cm$。已知在 $x=0$ 处场强为 19.5V/cm，求该样品的温度 $T$？

5—3 用一稳定光照射某强 n 型半导体，非平衡载流子产生率为 $g$，样品的平衡载流子浓度为 $n_0$ 和 $p_0$，复合系数为 $r$，在 $t=0$ 时，另外一闪光照射样品，产生的非平衡载流子为 $\Delta n=\Delta p$；试证明，闪光后任意时刻 $t$ 空穴浓度为

$$p(t)-p_0=\Delta pe^{-rn_0t}+\frac{g}{rn_0}$$

并画出函数曲线。

5—4　用一个强n型的Si晶体做开关器件，要求载流子寿命在0.01μs以下，若采用掺金的办法来达到，问掺入的金原子浓度至少是多少？设金的复合中心能级对空穴的俘获系数为$1.15\times10^{-7}cm^3/s$。

5—5　n型硅片表面受均匀恒定光照射时，在表面注入的非平衡少数载流子的浓度为$5\times10^{11}/cm^3$，设少子寿命为50μs，迁移率为$1000cm^2/V\cdot s$，试计算：

(1)非平衡少子的扩散长度；

(2)在离表面二个扩散长度处的少子净复合率；

(3)求该处少子的扩散电流密度。

5—6　有n型均匀半导体细棒，在$x=0$处有稳定光照，$A$端有稳定的电注入，$B$端是良好的欧姆接触，在棒中有均匀电场$E$，其方向如图5-10所示。稳定时，$x=0$处非平衡载流子浓度为$\Delta p_0$，$A$点非平衡载流子浓度为$2\Delta p_0$，$A0$为一个扩散长度，$0B$为该情况下的一个牵引长度；已知$D_p$、$\mu_p$、$\tau_p$，求非平衡载流子在细棒中的分布。

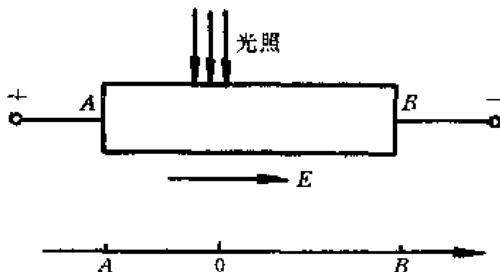



图5-10

5—7　一个由硅材料制备的样品，其受主掺杂浓度$N_A=2\times10^{15}/cm^3$，施主掺杂浓度$N_D=10^{16}/cm^3$，样品的截面积为$S=0.2cm^2$，长$l=2cm$；室温下，电子和空穴的迁移率分别为$1200cm^2/V\cdot s$和$400cm^2/V\cdot s$；在外加电压作用下流过样品总的电流为$I=500mA$，试求：

(1)$I_n$、$I_p$各为多少？($I_n=\frac{n_0\mu_nI}{n_0\mu_n+p_0\mu_p}$，$I_p=\frac{p_0\mu_pI}{n_0\mu_n+p_0\mu_p}$)

(2)$\frac{I_n}{I_p}$与总电流$I$有关吗？并推导$I_n/I_p$的表达式。

5—8　用光电导衰减法测量平衡少数载流子的寿命，实验装置如图5-11所示。设n型半导体样品长$L$，截面积为$A$，电阻率$\rho=1\Omega\cdot cm$，电子和空穴的迁移率分别为$3600cm^2/V\cdot s$和$1000cm^2/V\cdot s$，样品与电源$E$和电阻$R$串联。当光照停止后样品中非平衡少子减少引起电阻的变化为$\Delta r$，反映在示波器上输入电压变化为$\Delta V=I\cdot\Delta r$，试分析：

(1)在什么条件下能从示波器上直接读出少子寿命？

(2)若少子寿命为$10^{-4}s$的数量级，选$I=10mA$，这时对样品的尺寸有什么要求？

(3)实验上观察到电压的变化为$\Delta V=\Delta V_0e^{-\frac{t}{\tau}}$，式中$\Delta V_0$为光照刚停止时(即$t=0$时)样品上电压的变化值，求证：$\tau$即为非平衡载流子的寿命？

5—9　如图5-12，已知在5mm长的n型硅半导体细棒的端面$A$处注入的非平衡空穴浓度为$\Delta p=10^{10}/cm^3$，室温下该材料的空穴迁移率$\mu_p=500cm^2/V\cdot s$，空穴的寿命$\tau_p=50\mu s$，室温下忽略端面$A$的表面复合作用，求表面处扩散电流密度。

5—10　用某一单色光(光子流通量为 $I_0$)本征激发一块面积很大的 n 型半导体,该半导体对光的吸收系数为 $\alpha$,设样品厚度 $d$ 远大于扩散长度 $L_p$ 和吸收长度 $1/\alpha$,即 $d\gg L_p$,$d\gg \frac{1}{\alpha}$;设 $s_1$,$s_2$ 分别为正面和背面的表面复合速度,如图 5-13 所示。试求:

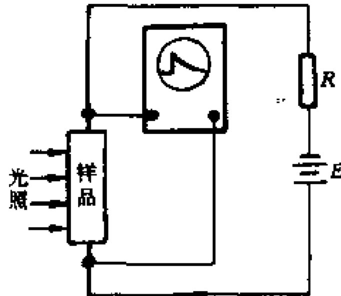



图 5-11

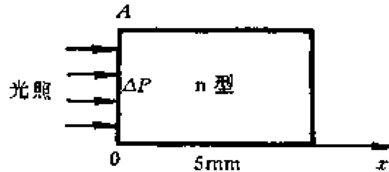



图 5-12

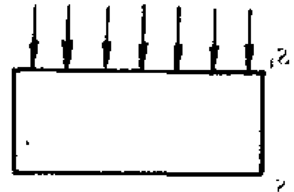


图 5-13

(1)写出非平衡少数载流子的连续性方程及边界条件。

(2)求证非平衡少数载流子浓度沿 $y$ 方向的分布为:

$$\Delta p(y)=\frac{\alpha I_0}{1-\alpha^2 L_p{}^2}\tau_p\left(e^{-\alpha y}-\frac{\alpha_1+\alpha L_p}{1+\alpha_1}e^{-\frac{y}{L_p}}\right)$$

式中,$\alpha_1=\frac{s_1 L_p}{D_p}$;$\tau_p$ 为非平衡空穴的寿命;$D_p$ 为空穴的扩散系数。

5—11　在某硅半导体器件的 $p$ 区内,$x$ 值从 0～0.05 范围内电子浓度 $n=n_0(1-e^{-0.02x})$,若 $N_A=10^{15}/cm^3$,本征载流子浓度 $n_i=10^{10}/cm^3$,计算 $x=0$ 处非平衡载流子浓度,画图示意之。

5—12　在海恩斯-肖克来实验中,用一束光照射均匀的 p 型 InP 材料,已知光源和接收探针之间的距离为 10cm,光脉冲和在示波器上出现的尖峰之间的扫描时间为 0.25ms,若所加电场为 10V/cm,计算少数载流子的迁移率。($4\times10^3 cm^2/V\cdot s$)

5—13　用 n 型 Ge 作为海恩斯-肖克来迁移率实验中的被测样品,实验装置如图 5-14 所示,样品长 1cm,探针(1)和探针(2)之间距离为 0.95cm,$E_0=2V$,脉冲在探针(1)处注入后经过 0.25ms 到达探针(2),脉冲宽度 $\Delta t=117\mu s$,试计算空穴的迁移率 $\mu_p$ 和扩散系数 $D_p$,并由计算结果核对爱因斯坦关系式。

5—14　若我们用海恩斯-肖克莱实验计算 n 型半导体样品中的空穴寿命,要做如何的计算。设示波器电压脉冲的峰值正比于在时间 $t_d$ 时刻收集探针(2)处的空穴浓度,且显示的脉冲近似为高斯分布。改变电场得到下面的实验数据:当 $t_d=200\mu s$ 时,脉冲峰值为 20mV;当 $t_d=50\mu s$ 时,脉冲峰值为 80mV,求少子空穴的寿命 $\tau_p$。

5—15　某半导体 n 型硅样品,其电子浓度 $n_0=10^{14}/cm^3$,电子和空穴寿命均为 2μs,在一稳定光照射下非平衡载流子产生率 $g=10^{15}/(cm^3\cdot s)$求非平衡载流子浓度,电子和空穴的准费米能级位置,并画图示意之。设 $n_i=1.5\times10^{10}/cm^3$。($\Delta n=\Delta p=2\times10^{15}/cm^3$,$E_F^n-E_i=0.234eV$,$E_F^p-E_i=0.189eV$)

5—16　某 n 型直接半导体其掺杂浓度为 $10^{14}/cm^3$,本征载流子浓度为 $10^{10}/cm^3$,载流子寿命 $\tau_n=\tau_p=10^{-7}s$。

(1)若该样品在一稳定均匀光照射下其非平衡载流子产生率为 $g=2\times10^{21}/(cm^3\cdot s)$,

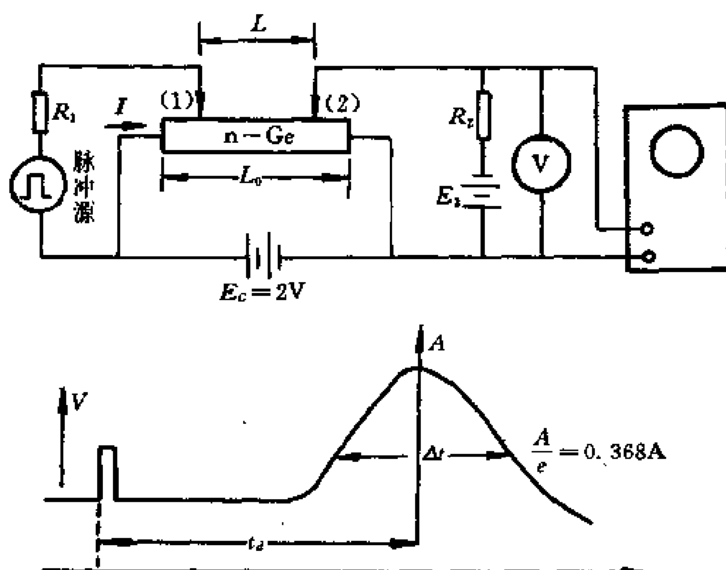



图 5-14

求非平衡载流子浓度；

(2)求电子和空穴的准费米能级位置；

(3)若稳定光照射在样品上一个很窄的区域内，画图说明准费米能级在光照区以及两侧几个扩散长度范围内的分布，设 $E_g=1$eV，且满足电中性条件。

5—17　如图 5-15 所示，p 型硅棒一端有稳定的电离辐射，使注入的非平衡载流子为：$n(x)=(10^{21}\cdot e^{-5000x}+10^{17})/\text{cm}^3$；

已知：$N_A=10^{17}/\text{cm}^3$，$n_i=10^{10}/\text{cm}^3$，$D_n=30\text{cm}^2/\text{s}$，$D_p=10\text{cm}^2/\text{s}$。

(1)作为 $x$ 的函数，计算沿正 $x$ 方向的电子电流 $I_n$ 和空穴电流 $I_p$；

(2)求空穴的漂移电流和棒中电场 $E(x)$；

(3)根据高斯定理求硅棒内净电荷 $\rho(x)$；

(4)求出净电荷密度 $\rho(x)$与非平衡电荷密度的比值。

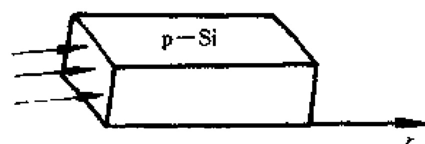



图 5-15

5—18　在上题图中，设辐射在 $x=0$ 处产生非平衡载流子浓度为 $10^{14}/\text{cm}^3$，其寿命为 $\frac{1}{30}\mu\text{s}$。因为硅棒较长，另一端可认为其载流子浓度趋于平衡值，作为 $x$ 的函数，求稳定照射时的电子浓度，电子电流 $I_n$，以及在正 $x$ 方向上空穴漂移电流和扩散电流。

5—19　均匀掺杂半导体样品中，其施主浓度 $N_D=10^{16}/\text{cm}^3$，本征载流子浓度 $n_i=10^{10}/\text{cm}^3$，扩散系数 $D_p=10\text{cm}^2/\text{s}$，非平衡少子寿命 $\tau=10\mu\text{s}$，设空穴浓度在 $x=0$，和 $x=5\times10^{-3}$cm 处分别为 $10^{14}/\text{cm}^3$ 和 $10^4/\text{cm}^3$；分别求空穴浓度和电子浓度。

5—20　试讨论在高注入水平情况下，非平衡少数载流子寿命 τ 与注入水平的关系。设 $\tau_{p0}=\tau_{n0}$，$E_t=E_v+\frac{E_g}{2}$　$(E_t=E_i)$。

5—21　设有均匀的 n 型半导体在 $t=0$ 时受到一较强的光脉冲的均匀照射，光照下

电子-空穴对的产生率为 $g_p = A\delta(t)$，试求空穴浓度的分布。

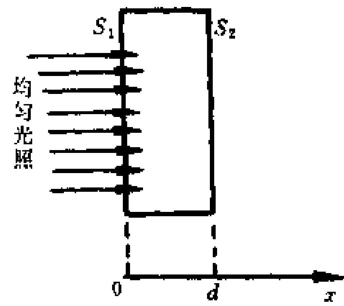



图 5-16

5—22　设有厚度为 $d$ 的 n 型半导体，两表面的复合速度分别为 $s_1, s_2$（如图 5-16 所示），受到光照射后，体内均匀产生非平衡载流子，其产生率为 $g(1/(\text{cm}^3 \cdot \text{s}))$，设非平衡载流子寿命为 $\tau_p$，扩散系数为 $D_p$，求稳定光照时非平衡载流子浓度分布。

5—23　n 型锗样品，电阻率 $\rho = 10\Omega \cdot \text{cm}$，设复合中心能级 $E_t$ 在价带顶之上 0.22eV 处，$\tau_n = 100\mu\text{s}$，$\tau_p = 10\mu\text{s}$，求室温下寿命 $\tau$。设 $N_c \approx N_v = 10^{19}/\text{cm}^3$。

5—24　(1)某半导体样品内沿 $x$ 方向有一维电流，电流密度为 $J_0$，设电流完全由空穴浓度梯度形成，$J$ 不随距离和时间而变化，在 $x=0$ 处空穴浓度为 $p(0)$，求空穴浓度与 $x$ 之间的函数关系。忽略复合效应和存贮电荷形成的电场以及电导率调制（这种情况相当于 pnp 晶体管基区的电流输运情况）。

(2)设沿负 $x$ 方向还有一个大小为 $E$ 的电场，此时流过样品的电流密度仍为 $J$，但 $x=0$ 处，空穴浓度为 $p'(0)$（$J$ 是小于传导电流的扩散电流）。

证明：当电场 $E$ 与 $x$ 无关时，空穴浓度为：

$$p(x) = e^{-\frac{x}{x_0}}[p'(0) + \frac{J}{q\mu_p E}] - \frac{J}{q\mu_p E}$$

并求出 $x_0$

(3)当 $x$ 很小时，空穴浓度可表示为：

$$p(0) = p'(0) - x[\frac{J}{D_p} + p'(0)\frac{\mu_p E}{D_p}]$$

$D_p$ 为空穴扩散系数。

5—25　(1)设 $Q$ 为存贮在一半导体区域内的非平衡少数载流子的电荷，该区域截面为 $A$，长度为 $L$，假定无电场 $E$ 存在，则流过截面 $A$ 的电流 $I$ 只是由于少数载流子扩散形成的，证明：

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\tau} = I$$

式中，$\tau$ 为少数载流子的平均寿命。

(2)证明：稳态电流为 $I_s = \frac{Q}{\tau}$。

5—26　某电阻率为 $5\Omega \cdot \text{cm}$ 的硅单晶由于少数载流子注入，得到如图 5-17 所示空穴浓度分布，设样品截面积为 $0.01\text{cm}^2$，厚度为 0.01cm；设 $p_n(0)$ 为其平衡浓度 $p_{n0}$ 的 100 倍。室温下，无电场存在时，由此区流出的电流为多少？

5—27　一截面为 $1\text{cm}^2$ 的均匀掺杂 Ge 样品，其厚度 $W = 200\mu\text{m}$，掺 Ga 浓度为 $10^{17}/\text{cm}^3$，已知本征载流子浓度 $n_i^2 = 6.25 \times 10^{26}/\text{cm}^3$；电子和空穴迁移率分别为 $3600\text{cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$，$1600\text{cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$；少子寿命 $\tau = 1.1 \times 10^{-4}\text{s}$；设电子分布的边界条件为：当 $x=0, n=0$；当 $x=W, n=10^{16}/\text{cm}^3$。(1)求少数载流子的分布数。(2)求电子电流密度 $J_n$。

5—28　已知某 p 型硅样品，在温度 $T$ 时，$J_p = 30\text{mA/cm}^2$，在样品右端，即 $x=0$ 处，电流密度的一半由电导形成，另一半由扩散造成的。设空穴 $p(x) = 10^{14} + 10^{12}e^{-\alpha x}$，式中 $\alpha =$

$10^4$/cm；$x=0$ 处的电势梯度为 19.5V/cm。求样品的温度 $T$ 为多少？

5—29 设一半导体样品的 $\tau_n=\tau_p=\tau_0$，且不随样品中掺杂浓度而改变。试求电导率为何值时，样品的小讯号寿命取极大值，并证明极大值为：

$$\tau_{max}=\tau_0(1+\mathrm{ch}\frac{E_t-E_i}{kT})$$

5—30 (1)一块 n 型硅样品的 $N_D=10^{15}/\mathrm{cm}^3$，$\tau_p=1\mu s$，$g_L=5\times10^{19}/(\mathrm{cm}^3\cdot s)$，计算它的电导率和准费米能级($\sigma=0.23/(\Omega\cdot\mathrm{cm})$，$E_F^n-E_i=0.288\mathrm{eV}$，$E_i-E_F^p=0.209\mathrm{eV}$)。

(2)若要产生 $10^{15}$个空穴/cm³，则其产生率为多大？其电导率和准费米能级又为若干($g_l=10^{21}/(\mathrm{cm}^3\cdot s)$，$\sigma=0.509/(\Omega\cdot\mathrm{cm})$；$E_F^n-E_i=0.304\mathrm{eV}$，$E_i-E_F^p=0.287\mathrm{eV}$)？

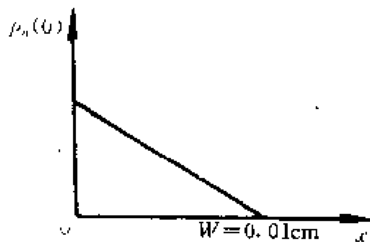



图 5-17

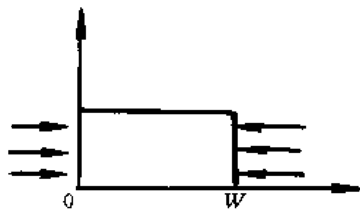



图 5-18

5—31 某 n 型硅样品在其两端面均匀光照，如图 5-18 所示。稳态时，在 $x=0$ 端面光生电子-空穴对为 $p_1$，在 $x=W$ 端面光生电子-空穴对为 $p_2$。试求：

(1)稳态时空穴浓度分布；

(2)设 $p_1=100p_0$，$p_2=10p_0$($p_0$ 为平衡时空穴浓度)，$L_p=W$，画出 $p$-$x$ 曲线；

(3)设 $L_p=0.1W$ 和 $L_p=10W$，重复(2)。

5—32 一块足够厚的 p 型 Si 样品，其电子迁移率为 1200cm²/(V·s)，寿命 $\tau_n=10\mu s$，在其表面稳定注入的电子浓度$(\Delta^n)_0=7\times10^{12}/\mathrm{cm}^3$，试计算在离表面多远的地方，由表面扩散到该处的非平衡少子电流密度为 1.20mA/cm²，忽略表面复合。

5—33 电子陷阱能级可由热激电流(TSC)实验测出，实验中半导体首先被冷却到很低的温度，然后用强光照射使全部陷阱均被电子填充，达到稳定状态后把光撤去，半导体样品在黑暗处以线性速率缓慢加热，同时测量不同温度下的电导率，测量中必须减去暗电流。在温度 $T_m$ 测得-电导率峰值，在这个点上费米能级与 $E_t$ 一致释放出全部被俘获的电子。

(1)证明：陷阱能级可用下式表示：

$$E_c-E_t=k_0T_m\ln\frac{q\mu_nN_c(T_m)}{\sigma_m}$$

(2)用 GaAs 晶体作为测试样品作热激电流实验测量得到 $T_m=-33$℃，设样品截面积为 0.1cm²，长度为 1cm，当偏置电压为 100V 时热激电流峰值 140nA，计算 $E_t$ 位置。($E_c-E_t=0.50\mathrm{eV}$)

5—34 对下列复合中心分布推导复合率的表达式：

(1)复合中心密度 $D_t$(1/(cm²·eV))在 $E_v$ 和 $E_c$ 之间均匀分布。

(2)复合中心密度 $D_t$ 按能量增加而线性增加，设当 $E=E_i$ 时，$D_t=0$，当 $E=E_c$(或 $E_v$)时为 $2D_t$。

# 第六章　p-n 结

## 内容提要

(1)p-n 结是半导体器件结构的基本组成部分，它是利用控制杂质分布的工艺方法来实现的，根据杂质分布可分为突变结和缓变结。

(2)p-n 结平衡时，势垒区(即空间电荷区)内电子(或空穴)的扩散和漂移相抵消，整个 p-n 结出现统一的费米能级，这时势垒高度为：

$$qV_D = k_0T\ln\frac{N_DN_A}{n_i^2}$$

(3)平衡时 p-n 结载流子浓度为：

$$n(x) = n_{p_0}e^{\frac{qV(x)}{k_0T}} \qquad p(x) = p_{n_0}e^{-\frac{qV(x)}{k_0T}}$$

设 $V(x_n)=V_D$，则

$$n(x_n) = n_{p_0}e^{\frac{qV_D}{k_0T}} = n_{n_0} \qquad p(x_n) = p_{n_0}e^{-\frac{qV_D}{k_0T}} = p_{p_0}$$

$$V(x_p) = 0\text{；则 } p(x_p) = p_{p_0} \qquad n(x_p) = n_{p_0}$$

(4)p-n 结正向偏置时，外加电场削弱势垒区内自建电场，因而势垒区内扩散占优势，使 p 区和 n 区有少子注入，形成正向扩散电流。

忽略势垒区复合小注入条件，通过势垒两侧的少子分布可以导出 p-n 结正向电流与电压关系式：

$$I = Aq\left(\frac{D_nn_{p_0}}{L_n} + \frac{D_pp_{n_0}}{L_p}\right)(e^{\frac{qV}{k_0T}} - 1) = I_s(e^{\frac{qV}{k_0T}} - 1)$$

对于 $p^+$-n 结：$I = Aq\dfrac{D_pp_{n_0}}{L_p}(e^{\frac{qV}{k_0T}} - 1)$

对于 p-$n^+$结：$I = Aq\dfrac{D_nn_{p_0}}{L_n}(e^{\frac{qV}{k_0T}} - 1)$

(5)p-n 结反向偏置时，外加电压在势垒区产生的电场和自建电场的方向是一致的，加强了势垒区的电场，导致势垒增高，势垒区宽度变大。因此，漂移作用占优势，但由于 p 区的电子和 n 区的空穴都很少，因此由漂移作用形成的反向电流就很小。根据势垒两侧少子浓度的分布可以导出反向扩散电流：

$$I_D = Aq\left(\frac{D_nn_i^2}{L_nN_A} + \frac{D_pn_i^2}{L_pN_D}\right)$$

势垒区产生电流也是反向电流的一个重要分量，其表达式为：

$$I_g = Aq\frac{n_i}{2\tau_n}x_D$$

(6)p-n 结有电容效应，分为势垒电容 $C_T$ 和扩散电容 $C_D$。由于势垒区的空间电荷数量

随外加电压的变化而产生的电容效应称为势垒电容。由于扩散区的电荷数量随外加电压变化而产生的电容效应称为扩散电容。

势垒电容的数值和 p-n 结杂质分布有关。实际的扩散结，一般浅结高浓度扩散可近似看作单边突变结，深结扩散在反向电压不太高的情况下可近似看作线性缓变结。

$$\text{对 n}^+\text{-p 结：} C_T = A\sqrt{\frac{q\varepsilon_r\varepsilon_0 N_A}{2(V_D - V)}}$$

$$\text{对 p}^+\text{-n 结：} C_T = A\sqrt{\frac{q\varepsilon_r\varepsilon_0 N_D}{2(V_D - V)}}$$

$$\text{对线性缓变结：} C_T = A\left(\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0^2 q}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha_j}{V_D - V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

扩散电容 $C_D$ 是正向电压的函数，随正向偏压按指数关系增加。

$$C_D = \left(Aq^2\frac{n_{p_0}L_n + p_{n_0}L_p}{k_0T}\right)e^{\frac{qV}{k_0T}}$$

扩散电容随频率增加而减小，所以上式只适用于低频情况。

(7)p-n 结击穿电压是衡量 p-n 结质量的一个重要参数。击穿机理有两种，一种是雪崩击穿，另一种是隧道击穿。雪崩击穿的条件为：

$$\int_0^{x_D}\alpha(\varepsilon)\mathrm{d}x = 1$$

式中，$\alpha(\varepsilon)$是电离率。

单边突变结击穿电压和轻掺杂一边的杂质浓度 $N_B$ 的关系为：

$$V_B = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 E_c^2}{2qN_B}$$

式中，$E_c$ 为临界场强。

对线性缓变结，击穿电压和杂质浓度梯度 $\alpha_j$ 的关系为：

$$V_B = \left(\frac{4}{3}\right)\sqrt{E_c^2}\sqrt{\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0}{q\alpha_j}}$$

隧道击穿电压具有负的温度系数，而雪崩击穿电压具有正的温度系数，这种温度效应是区分两种击穿机构的重要方法。

(8)高掺杂的 p 型和 n 型半导体形成的 p-n 结通常称为隧道结。由于这种 p-n 结具有正向负阻特性而获得广泛应用。

## 问　题

6—1　平衡 p-n 结有什么特点，画出势垒区中载流子漂移运动和扩散运动的方向。

6—2　定性地画出正向偏置时 p-n 结能带图；在图上标出准费米能级的位置，并与热平衡时 p-n 结能带图进行比较。

6—3　如图 6-1 所示，p-n 型半导体材料接触形成 p-n 结，试画出热平衡时的能带图，并标明势垒高度和势垒宽度。

6—4　平衡 p-n 结既然存在有电势差，为什么 p-n 结又不能作为固体电池呢？

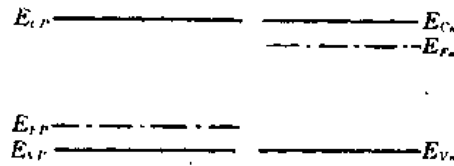



图 6-1

6—5 p-n 结结处的空间电荷层宽度的数量级是多少？这种空间电荷层由什么组成的。

6—6 写出 p-n 结整流方程，并说明方程中每一项的物理意义？对于较大的正向偏置和反向偏置，这个方程分别说明什么样的物理过程？

反向电流由哪几部分构成的？在一般情况下什么是主要的？为什么反向电流和温度关系很大？

6—7 解释硅 p-n 结的反向电流随反向电压增加而增大的原因。

6—8 在测试 p-n 结反向电流时，有光照和无光照是不一样的，试问哪种情况下数值大？为什么？

6—9 在隧道二极管中，n 区常重掺使 $E_{Fn}$位于导带中，p 区重掺使 $E_{Fp}$位于价带中，画出这种二极管在零偏和反偏时的能带图，并解释隧道二极管的伏安特性曲线？

6—10 考虑一个两侧掺杂浓度相等（即 $N_A=N_D$）的突变 p-n 结，画出其电荷、电场强度、电势在反偏条件下与到 p-n 结距离 $x$ 的函数关系。

6—11 分别画出正、反向偏置 p-n 结 n 侧少数载流子的浓度与到 p-n 结距离之间的函数关系曲线，指出过剩载流子浓度何处为正，何处为负？

6—12 说明 p-n 结势垒电容和扩散电容的物理意义，分别讨论它们与电流或电压的关系。反偏 p-n 结有无扩散电容？为什么？

6—13 区别雪崩击穿和隧道（齐纳）击穿的不同。为什么低击穿电压（$V_B<4.5$V）的 p-n 结其击穿电压的温度系数是负的？而高击穿电压时却是正的？

6—14 为什么 p-n 结的接触电位差不能通过万用表跨接在二极管两端的方法进行测量？

6—15 当 p-n 结 n 型区的电导率远远大于 p 型区的电导率时，p-n 结电流主要是空穴流还是电子流？

6—16 说明处于开路条件下的突变 p-n 结其接触电位差与哪些物理量有关？为什么一个开路的 p-n 结必然形成接触电位差？

6—17 （1）说明 p-n 结理想模型（即扩散模型）的基本假设。

（2）在推导 p-n 结电流-电压关系时，这些基本假设体现在哪些地方？

（3）对于非理想情况应做如何修正（着重从物理角度予以说明）？

6—18 选择正确答案填入横线上：

（1）在相同偏压下，单边突变 $p^+$-n 结单位面积电容量主要由______决定（n 区掺杂浓度，$p^+$ 区掺杂浓度，p-n 结面积）。

(2)在相同正向电流 $I_F$ 情况下，锗 p-n 结的正向微分电阻 $r_0$ 比硅 p-n 结的 $r_0$，在相同正向电压 $V_F$ 情况下，锗 p-n 结的 $r_0$ 比硅 p-n 结的 $r_0$(大，小，相同)。

(3)p-n 结雪崩击穿电压随温度升高而________，p-n 结的隧道击穿电压随温度升高而________(提高，降低，保持不变)。

(4)如果略去接触电阻和体电阻，$p^+$-n 结在大注入情况下外加正向电压________，$p^+$-n 结在小注入情况下，外加电压________(只降落在势垒区，只降落在扩散区，势垒区和扩散区各降落一部分)。

(5)若保持 p-n 结上正向电压 $V_F$ 不变，且 n 区掺杂浓度和少子寿命不变，而 p 区掺杂浓度增加，则在 n 区的非平衡少子贮存电荷量____，在 p 区的非平衡少子贮存电荷量____(增加，减少，不变)。

6—19　p-n 结的接触电势差 $V_0$ 有无可能超过禁带宽度 $E_g$? 为什么?

6—20　画出整个 p-n 结在均匀光照下的能带图，图上标明准费米能级 $E_F^n$ 和 $E_F^p$ 的变化(设 p-n 结开路和短路两种情况)。

6—21　比较不同电阻率的锗 p-n 结其反向电流的大小。比较电阻率近似相等的锗和硅 p-n 结，其反向电流的大小。

6—22　说明 $p^+$-n 结在正向偏置条件下，p 区空穴电流如何转换成 n 区电子电流。

## 解 题 示 例

**例 1**　有锗 p-n 结，设 p 区的掺杂浓度为 $N_A$，n 区掺杂浓度为 $N_D$，已知 $N_D=10^2N_A$，而 $N_A$ 相当于 $10^8$ 个锗原子中有一个受主原子，计算室温下接触电位差 $V_D$。若 $N_A$ 浓度保持不变，而 $N_D$ 增加 $10^2$ 倍，试求接触电位差的改变。

〔解〕 (1)已知锗原子的浓度为 $4.4\times10^{22}/\text{cm}^3$

$$\therefore N_A=4.4\times10^{22}\times10^{-8}=4.4\times10^{14}/\text{cm}^3$$

$$N_D=4.4\times10^{14}\times10^2=4.4\times10^{16}/\text{cm}^3$$

故

$$V_D=\frac{k_0T}{q}\ln\frac{N_DN_A}{n_i^2}$$

$$=0.026\ln\frac{4.4\times10^{14}\times4.4\times10^{6}}{(2.5\times10^{13})^2}$$

$$=0.026\times10.34=0.268(\text{V})$$

(2)设 $N_{D_1}$ 时对应的接触电势差为 $V_{D_1}$：

$$V_{D_1}=\frac{k_0T}{q}\ln\frac{N_AN_{D_1}}{n_i^2}$$

设 $N_{D_2}$ 时对应的接触电势差为 $V_{D_2}$：

$$V_{D_2}=\frac{k_0T}{q}\ln\frac{N_AN_{D_2}}{n_i^2}$$

则

$$V_{D_2}-V_{D_1}=\frac{k_0T}{q}\left(\ln\frac{N_AN_{D_2}}{n_i^2}-\ln\frac{N_AN_{D_1}}{n_i^2}\right)$$

$$=\frac{k_0T}{q}\ln\frac{N_{D_2}}{N_{D_1}}=0.12(\text{V})$$

**例 2** (1)证明对于硅合金 p-n$^+$结，其势垒电容每平方厘米之微法拉数为：

$$C_T = 2.913 \times 10^{-4}\left(\frac{N_A}{V_D - V}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(2)若 p 型区的电阻率 $\rho_p = 4\Omega \cdot \text{cm}$，接触电势差为 $V_D = 0.3\text{V}$，设截面积之直径为 1.27mm，当外加反向电压为 4V 时，求势垒电容 $C_T$；

〔解〕 (1)由 $C_T = \frac{\varepsilon A}{x}$ $\qquad x = \left[\frac{2\varepsilon(V_D - V)}{qN_A}\right]^{\frac{1}{2}}$

得：

$$\frac{C_T}{A} = \frac{\varepsilon}{x} = \left[\frac{qN_A}{2\varepsilon(V_D - V)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{q\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{N_A}{V_D - V}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{q\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = (0.5 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 12 \times 8.849 \times 10^{-12})^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2.913 \times 10^{-16}$$

$$\therefore \quad \frac{C_T}{A} = 2.913 \times 10^{-16}\left(\frac{N_A}{V_D - V}\right)^{\frac{1}{2}} (\text{F/cm}^2)$$

$$= 2.913 \times 10^{-4}\left(\frac{N_A}{V_D - V}\right)^{\frac{1}{2}} (\text{pF/cm}^2)$$

(2)$A = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4} = \pi \times (1.27 \times 10^{-1})^2$

$\approx 5.065 \times 10^{-2} (\text{cm}^2)$

由 $\rho = 1/N_A q\mu_p$ 得：$N_A = (4 \times 500 \times 1.6 \times 10^{-19})^{-1}$

$= 3.125 \times 10^{15} (1/\text{cm}^3)$

当 $V = -4V, V_D - V = 4 + 0.3 = 4.3(\text{V})$

$\therefore C_T = 2.913 \times 10^{-4} \times (3.125 \times 10^{15}/4.3)^{\frac{1}{2}} \times 1.267 \times 10^{-2}$

$= 99.49(\text{pF})$

**例 3** 由电阻率为 $1\Omega \cdot \text{cm}$ 的 p 型锗和 $0.1\Omega \cdot \text{cm}$ 的 h 型锗半导体组成一个 p-n 结，计算在室温(300K)时，内建电位差 $V_D$ 和阻挡层宽度。已知在上述电阻率下，p 区的空穴迁移率 $\mu_p = 1650\text{cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$，n 区电子的迁移率 $\mu_n = 3000\text{cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$，锗的本征载流子浓度 $n_i = 2.5 \times 10^{13}/\text{cm}^3$。

〔解〕 (1)在 p 型区：

$$p_{p_0} \approx N_A = \frac{1}{q\mu_p\rho_p}$$

$$= \frac{1}{1.6 \times 10^{-19} \times 1650 \times 1} = 3.8 \times 10^{15} (1/\text{cm}^3)$$

在 n 型区：

$$n_{n_0} = N_D = \frac{1}{q\mu_n\rho_n} = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19} \times 3000 \times 0.1}$$

$$= 2.1 \times 10^{16} (1/\text{cm}^3)$$

∴ 内建电位差

$$V_D = \frac{k_0 T}{q}\ln\frac{n_{n_0}p_{p_0}}{n_i^2}$$

$$=0.026\ln\frac{2.1\times10^{16}\times3.8\times10^{15}}{(2.5\times10^{13})^2}$$

$$=0.306(\mathrm{V})=306(\mathrm{mV})$$

(2)阻挡层宽度：

$$x_p=\left[\frac{2\varepsilon V_D}{qN_A\left(1+\dfrac{N_A}{N_D}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

式中　$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$　　$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\mathrm{F/m}$　　$\varepsilon_r=16$

$$\therefore\quad x_p=\left(\frac{2\times16\times8.85\times10^{-12}\times10^{-2}\times306}{1.6\times10^{-19}\times3.8\times10^{15}\times(1+0.183)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=3.45\times10^{-5}(\mathrm{cm})$$

同理：

$$x_n=\left[\frac{26V_D}{qN_D\left(1+\dfrac{N_D}{N_A}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{2\times16\times8.85\times10^{-12}\times10^{-2}\times0.306}{1.6\times10^{-19}\times2.1\times10^{16}\times(1+5.53)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=6.25\times10^{-6}(\mathrm{cm})$$

阻挡层宽度　　$x=x_n+x_p=6.25\times10^{-6}+3.45\times10^{-5}$

$$=4.08\times10^{-6}(\mathrm{cm})$$

**例 4**　有硅 p-n 结，p 和 n 区掺杂浓度分别为 $N_A=9\times10^{15}/\mathrm{cm}^3$ 和 $N_D=2\times10^{16}/\mathrm{cm}^3$；p 区中的空穴和电子迁移率分别为 $350\mathrm{cm}^2/(\mathrm{V\cdot s})$ 和 $500\mathrm{cm}^2/(\mathrm{V\cdot s})$，n 区中空穴和电子迁移率分别为 $300\mathrm{cm}^2/(\mathrm{V\cdot s})$ 和 $900\mathrm{cm}^2/(\mathrm{V\cdot s})$；设两区内非平衡载流子的寿命均为 1μs，p-n 结截面积为 $10^{-2}\mathrm{cm}^2$，$\frac{q}{k_0T}=38.7\left(\frac{1}{V}\right)$。当外加正向电压 $U_F=0.65\mathrm{V}$ 时，试求：

(1)在 300K 时流过 p-n 结的电流 I 表达式；

(2)假设以 p 区指向 n 区为 $x$ 轴的正方向，列出 n 区内空穴和电子浓度分布的表达式；

(3)确定 n 区内空穴扩散电流，电子扩散电流，电子漂移电流和总的电子电流随 $x$ 变化的表达式。

〔解〕　(1)求流过 p-n 的电流 $I$ 的表达式：

(i)首先根据爱因斯坦关系式求出 n 区空穴和 p 区电子的扩散关系。

$$D_p=\frac{k_0T}{q}\mu_p=\frac{300}{38.7}=7.75(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$$

$$D_n=\frac{k_0T}{q}\mu_n=\frac{500}{38.7}=12.9(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$$

(ii)空穴和电子的扩散长度：

$$L_p=\sqrt{D_p\tau_p}=\sqrt{7.75\times1\times10^{-6}}$$

$$=2.78\times10^{3}(\mathrm{cm})$$

$$L_n=\sqrt{D_n\tau_n}-\sqrt{12.9\times10^{-8}}$$

$$=3.59\times10^{-3}(\mathrm{cm})$$

(iii)热平衡时少子浓度：设 $n_i=1.5\times10^{10}/\mathrm{cm}^3$

$$p_{n_0}=\frac{n_i^2}{N_D}=\frac{(1.5\times10^{10})^2}{2\times10^{16}}$$

$$=1.1\times10^4(1/\text{cm}^3)$$

$$n_{p_0}=\frac{n_i^2}{N_A}=\frac{(1.5\times10^{10})^2}{9\times10^{16}}=2.5\times10^3(1/\text{cm}^3)$$

(iv)反向饱和电流：

$$I_S=qA\left(\frac{D_p p_{n_0}}{L_p}+\frac{D_n n_{p_0}}{L_n}\right)$$

代入有关数据：

$$I_S=1.6\times10^{-19}\times10^{-2}\left(\frac{7.75\times10^{11}\times10^4}{2.78\times10^{-3}}+\frac{12.9\times2.5\times10^3}{3.59\times10^{-3}}\right)=6.27\times10^{-14}(\text{A})$$

∴ 流过 $pn$ 的电流 $I$ 表达式写成：

$$I=I_S(e^{\frac{qV}{k_0T}}-1)=6.27\times10^{-14}(e^{38.2V}-1)(\text{A})$$

当 $V_F=0.65\text{V}$ 时，

$$I=6.27\times10^{-14}\times8.4\times10^{10}=5.27\times10^{-3}(\text{A})$$

$$=5.27(\text{mA})$$

(2)当 $V_F=0.65\text{V}$，n 区内空穴浓度分布为：

$$p_n(x)=p_{n_0}(e^{\frac{qV}{k_0T}}-1)e^{-\frac{x}{L_p}}+p_{n_0}$$

略去式中 1，得：

$$p_n(x)=p_{n_0}(e^{\frac{qV}{k_0T}})\cdot e^{-\frac{x}{L_p}}+p_{n_0}$$

$$=1.1\times10^4\times e^{38.7\times0.65}e^{-\frac{x}{2.78\times10^{-3}}}+1.1\times10^4$$

$$=9.25\times10^{14}e^{-357x}+1.1\times10^4(1/\text{cm}^3)$$

同理：$n_n=n_{n_0}+\Delta n=2\times10^{16}+9.25\times10^{14}e^{-357x}(1/\text{cm}^3)$

(3)(i)空穴扩散电流 $I_{pD}$：

$$I_{pD}=-AqD_p\frac{dp}{dx}$$

$$=-10^{-2}\times1.6\times10^{-19}\times7.75\times9.25\times10^{14}\times(357)e^{-357x}$$

$$=4.09\times10^{-3}e^{-357x}(\text{A})=4.09e^{-357x}(\text{mA})$$

(ii)电子扩散电流 $I_{nD}$：

$$I_{nD}=AqD_n'\frac{dn}{dx}$$

$$D_n'=\frac{k_0T}{q}\mu_n=\frac{900}{38.7}=23.25(\text{cm}^2/\text{s})$$

∴ $$I_{nD}=10^{-2}\times1.6\times10^{-19}\times23.25\times9.25\times10^{14}(357)e^{-357x}$$

$$=-12.28\times10^{-3}e^{-357x}(\text{A})$$

式中，负号表示电流方向和 $x$ 方向相反。

(iii)电子漂移电流 $I_{nd}$：由于 n 区内总电流 $I$ 包括空穴扩散电流 $I_{pD}$、电子扩

散电流 $I_{nD}$，空穴漂移电流 $I_p$和电子漂移电流 $I_n$，共有四个分量。其中由于注入的空穴浓度远小于电子浓度，空穴漂移电流可以忽略不计。在 n 区一侧存在有两个电场 $E$ 和 $E'$，$E$ 是外加正向电压时，流过 n 区的电流在 n 区体电阻上产生压降所引起的，$E'$是由于电子比空穴扩散得快而产生的一个由 p 区指向 n 区的电场。电场 $E'$使 n 区中空穴加速运动，对多子电子的扩散起着阻碍作用。根据总电流

$$I = I_{pD} + I_{nD} + I_n$$

$$\therefore \quad I_n = I - I_{nD} - I_{pD} = 5.27 - 4.09e^{-357x} + 12.28e^{-357x}$$
$$= 5.27 + 8.2e^{-357x}(\text{mA})$$

总的电子电流为电子漂移电流和电子扩散电流之和

$$I_n = I_n + I_{nD} = 5.27 - 4.09e^{-357x}(\text{mA})$$

**例 5** 一个硅 p-n 结二极管具有下列参数：$N_D=10^{16}/\text{cm}^3$，$N_A=5\times10^{18}/\text{cm}^3$，$\tau_n=\tau_p=1\mu\text{s}$，$A=0.01\text{cm}^2$。设结两边的宽度远大于各自少数载流子的扩散长度。试求室温（300K）时正向电流为 1mA 时的外加电压。设 p 型区的电子迁移率 $\mu_n=500\text{cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$，n 型区的空穴迁移率 $\mu_p=180\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$

〔解〕 根据爱因斯坦关系式，求得扩散系数为：

$$D_p = \frac{k_0T}{q}\mu_p = 0.026\times500 = 13(\text{cm}^2/\text{s})$$

$$D_n = \frac{k_0T}{q}\mu_n = 0.026\times180 = 4.7(\text{cm}^2/\text{s})$$

扩散长度：

$$L_p = \sqrt{\tau_pD_p} = 3.6\times10^{-3}(\text{cm})$$

$$L_n = \sqrt{\tau_nD_n} = 2.2\times10^{-3}(\text{cm})$$

少子浓度：

$$p_{n_0} = \frac{n_i^2}{N_D} = \frac{(1.5\times10^{10})^2}{10^{16}} = 2.25\times10^4(1/\text{cm}^3)$$

$$n_{p_0} = \frac{n_i^2}{N_D} = \frac{(1.5\times10^{10})^2}{5\times10^{18}} = 45(1/\text{cm}^3)$$

$$I_0 = qA\left(\frac{D_pp_{n_0}}{L_p} + \frac{D_nn_{p_0}}{L_n}\right)$$

$$= 1.6\times10^{-19}\times0.01\times\left(\frac{13\times2.25\times10^4}{3.6\times10^{-3}} + \frac{4.7\times45}{2.2\times10^{-3}}\right) = 1.3\times10^{-13}(\text{A})$$

由电流-电压方程 $I=I_0(e^{\frac{V}{V_T}}-1)$得：

$$V = V_T\ln\left(\frac{I}{I_0}+1\right) = 26\ln\left(\frac{10^{-3}}{1.3\times10^{-13}}+1\right) = 610(\text{mV})$$

**例 6** 一个 p-n 结二极管作为压控电容（变容管）使用，在反向偏置电压为 2V 时，它的可变电容量为 200pF，试问需要加多大的反偏置电压，才能使它的电容减小到 100pF？假设接触电位是 0.85V。

〔解〕 一个突变结的势垒电容 $C_T$ 为：

$$C_T = A\left(\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 qN_AN_D}{2(N_A+N_D)}\right)\cdot(V_D-V)^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{F/m^2})$$

式中，$V_D$ 为接触电位；$V$ 为外加电压；$N_A$、$N_D$ 分别为结两边掺杂浓度。因此对于特定的二极管：

$$C_T = \frac{k}{(V_D-V)^{\frac{1}{2}}}$$

当 $V=-2\mathrm{V}$ 时，$C_T=200\mathrm{pF}$

∴　$k=C_T(V_D-V)^{\frac{1}{2}}=200\times10^{-12}\times(0.85+2)^{\frac{1}{2}}=3.38\times10^{-10}$

故：当 $C_T=100\mathrm{pF}$ 时：

$$(V_D-V)^{\frac{1}{2}}=\frac{k}{C_T}=\frac{3.38\times10^{-10}}{100\times10^{-12}}$$

∴

$$V=10.6(\mathrm{V})$$

## 习　题

6—1　试证明：在热平衡条件下，p-n 结中费米能级处处满足$\frac{dE_F}{dx}=0$的条件。

6—2　一个 p-n 结由电导率为 $10^4$S/cm 的 p 型锗和电导率为 $10^2$S/cm 的 n 型锗组成，其电子和空穴迁移率分别为 3600cm²/(V·s)和 1700cm²/(V·s)；室温时，本征载流子浓度 $n_i=2.5\times10^{13}/\mathrm{cm^3}$，$L_n=L_p=0.1$cm，求：

(1)室温时结两端电位差？(0.35V)

(2)室温时饱和电流密度 $J_s$ 以及电子饱和电流密度和空穴饱和电流密度的比值 $J_n/J_p$？($0.25\times10^{-4}\mathrm{A/cm^2}$，100)

6—3　一个硅突变 p-n 结，两侧电阻率分别为 2Ω·cm(p 侧)和 1Ω·cm(n 侧)，计算室温时势垒高度。

6—4　一个突变的锗 p-n 结，设 $N_D=10^2N_A$，而 $N_A$ 相当于 $10^8$ 个锗原子中有一个受主杂质原子，计算室温时接触电势差。(0.268V)

对硅的突变 p-n 结重复上面的内容。

6—5　一个硅 p-n 结二极管具有下列参数：$N_D=10^{16}/\mathrm{cm^3}$，$N_A=5\times10^{18}/\mathrm{cm^3}$，$\tau_n=\tau_p=1\mu\mathrm{s}$，结面积 $A=0.01\mathrm{cm^2}$，设结两边的宽度远远大于各自数载流子的扩散长度，求室温时正向电流为 1mA 时的外加电压 $V$。(610mV)

6—6　有 p-n 结在小注入条件下，因 $p_n\ll n_n$，若假定少数载流子全部由扩散造成，证明：$n$ 侧的电场为：

$$E(x)=\frac{I+\left(\frac{D_n}{D_p}-1\right)I_{pn}(x)}{qn\mu_nA}$$

式中，$I$ 为总电流；$I_{pn}(x)$为 n 型区空穴电流；$A$ 为结面积。画出下面几种条件下 $n$ 侧的电流与距离之间的函数关系。

(1)流过 p-n 结总的电流；

(2)少数载流子电流；

(3)多数载流子扩散电流和漂移电流；

(4)总的多数载流子电流。

6—7 证明流过 p-n 结的空穴电流和电子电流之比为：

$$\frac{J_p}{J_n}=\frac{\sigma_p L_n}{\sigma_n L_p}$$

式中，$\sigma_p$ 和 $\sigma_n$ 分别为 p 侧和 n 侧的电导率；$L_n$ 和 $L_p$ 分别为电子和空穴的扩散长度。

6—8 证明合金型 p-n 结($N_A \ll N_D$ 时)的耗尽层宽度为：

$$W=\left(\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_p V_J}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

式中，$V_J$ 为 p-n 结两端外加电压等于 $V_A$ 时的结电位。

6—9 有一只 $N_A=N_D$ 的隧道二极管，掺杂浓度相当每 $10^3$ 个 Ge 原子有一个杂质原子，试在室温条件下计算：(1)开路情况下的势垒高度；(2)空间电荷区宽度。

6—10 对于突变 p-n 结：(1)导出接触电势差 $V_D$ 的公式。如果是硅的 p-n 结，n 区电阻率 $\rho_n=1\Omega\cdot cm$，p 区电阻率 $\rho_p=0.1\Omega\cdot cm$ 试计算室温下 $V_D$ 的数量级。设 $n_i=1.5\times10^{10}/cm^3$，$\mu_n=1000cm^2/(V\cdot s)$，$\mu_p=150cm^2/(V\cdot s)$，ln10=2.3

(2)用耗尽近似导出势垒电容公式。

6—11 利用平衡 p-n 结性质，推导爱因斯坦关系式。

6—12 假设我们要求设计一势垒电容较小的 p-n 结二极管。

(1)讨论下面所选择的杂质浓度的影响：

(a)$N_A$、$N_D$ 二者都较大；(b)$N_A$、$N_D$ 都较小，但是均大于 $4n_i^2$；

(c)一个较大，另一个较小。

(2)对于上面(a)、(b)、(c)三种条件的势垒电容分别记做 $C_1$、$C_2$、$C_3$，设大浓度取 $10^{18}/cm^3$，小浓度取 $10^{12}/cm^3$。计算 $C_1/C_2$、$C_3/C_2$(1000 和 1.414)

6—13 单边突变结电容 $C_T=A\left[\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 qN_B}{2(V_D-V)}\right]^{\frac{1}{2}}$，式中 $N_B$ 是轻掺杂一边的浓度，$A$ 为结面积。

(1)证明：$C_T=k/(V_D-V)^{\frac{1}{2}}$，式中 $k$ 为一合适的常数。设 $N_D=0.8V$，$V=0V$，$C_T=50pF$，计算 $k$ 的值($k=44.7pF\cdot V^{\frac{1}{2}}$)

(2)证明：$C$ 和 $V$ 的关系也可以写成 $C=\frac{C_0V_D}{(V_D-V)^{½}}$，式中 $C_0$ 为 $V=0$ 时的 $C$ 值。

(3)证明：$C$ 和 $V$ 的关系也可以写成 $C=C_1\left(\frac{V_D-V_1}{V_D-V}\right)^{\frac{1}{2}}$

式中，$C_1$ 为 $V=V_1$ 时的 $C$ 值。

设 $V=-1V$ 时 $V_D=0.8V$，$C=100pF$，

求 $V=-10V$ 时的电容值(40.8pF)

6—14 一个硅 p-n 结，p 侧浓度为 $10^{18}/cm^3$，n 侧浓度为 $10^{15}/cm^3$。

(1)求击穿电压；

(2)最大电压降将出现在哪一区域。

6—15 一个由突变结组成的二极管(如图 6-2 所示)，$N_D=10^{17}/cm^3$，p 区宽度 $W=$

3μm，且 $L_n \gg W$；二极管面积 $A=10^{-5}\text{cm}^2$，试计算：

(1)当二极管通过正向电流为 0.5mA 时，中性 p 区中贮存多少电荷？

(2)在正向偏压下，空间电荷层中存贮的电荷有多少？

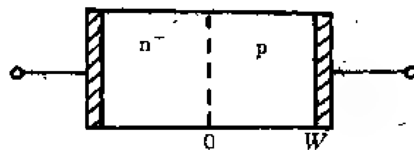


图 6-2

已知：室温下 $E_g=1.12\text{eV}$，$\varepsilon_r=16\text{cm}^2/\text{s}$，$n_i=1.5\times 10^{10}/\text{cm}^3$，$\varepsilon_0=8.85\times10^{-14}\text{F/cm}$，$k_0T=0.026\text{eV}$，$U_{s_1}=8.5\times10^6\text{cm/s}$

6—16 设一个 $p^+$-n 结二极管，其结面积为 $A=0.5\text{cm}^2$，少数载流子寿命 $\tau_p=100\mu\text{s}$，迁移率为 $1900\text{cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$，在低电压情况时具有的电阻值为 400Ω(室温下)。

(1)求反向饱和电流值(一级近似)；

(2)求 n 区中少数载流子平衡浓度 $p_{n_0}$。

6—17 当 $n^+$-p 结加反向偏压时，分析比较产生反向电流的两种机构。设耗尽区内产生率为 $G_{耗}=\frac{n_i}{2\tau_0}$($n_i$ 为本征载流子度，$\tau_0$ 为耗尽区有效寿命)，中性扩散区少子寿命为 $\tau$，p 区电子平衡浓度为 $n_{p_0}$，则中性扩散区的少子产生率为 $G_{扩}=\frac{n_{p_0}}{\tau}$。试给出这两种反向电流的表达式，并证明两种电流的比值为 $2\frac{n_{p_0}L_n}{n_iW}$ 或 $2\frac{n_iL_n}{N_AW}$(假定 $\tau=\tau_0$)，$W$ 为耗尽区宽度。讨论：此比值与温度和禁带宽度的关系。

6—18 在一缓变 p-n 结中，杂质分布为 $N_D=ax, x>0$；$N_A=bx, x<0$。试用耗尽近似，求出空间电荷区宽度和势垒电容。

6—19 某 p-n 结两侧的掺杂水平在同一个数量级，求证：接触电势差和结耗尽区宽度分别为：

$$V_0=\frac{qN_AN_D(x_n+x_p)^2}{2\varepsilon_r\varepsilon_0(N_A+N_D)}$$

$$x_n=\left[\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0V_0N_A}{qN_D(N_A+N_D)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_p=\left[\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0V_0N_D}{qN_A(N_A+N_D)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

6—20 GaAs$p^+$-n 结二极管的电容是反向偏压的函数，其电容是用频率为 1MHz 的电容测试仪测得，其测试数据如下所示：

| V(V) | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 | 4.5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C(pF) | 19.9 | 17.3 | 15.6 | 14.3 | 13.3 | 12.4 | 11.6 | 11.1 | 10.5 | 10.1 | 9.8 |

计算接触电势差 $V_0$ 和 n 区掺杂浓度 $N_D$，设结面积为 $4\times10^{-4}\text{cm}^2$。

($V_0=15.7\text{V}$，$N_D=5.03\times10^{16}/\text{cm}^3$)

6—21 证明：最大复合速率发生在空间电荷层内的 $p=n$ 处，并推导

$$n=p=n_ie^{\frac{qV}{2k_0T}}$$

6—22　一个硅合金型 p-n 结，两边掺杂浓度分别为 $N_A=10^{18}/cm^3$，$N_D=10^{14}/cm^3$，结面积 $A=2mm^2$，空穴寿命 $\tau_p=1\mu s$，空穴扩散系数 $D_p=13cm^2/s$，室温下试求：

(1)外加正偏压为 234mV 时流过 p-n 结的电流。

(2)现把这个 p-n 结作为硅光电池用，若要产生 26mV 的光生电动势，求它的光电流？设室温下 $n_i=1.5\times10^{10}/cm^3$。

6—23　试推导 p-n 结空间电荷区产生电流密度的表达式。

6—24　假设一 p-n 结，其结电容 $C$ 与电压的关系如图 6-3 所示。

(1)计算当电压从 −10V 改变到 −5V 时，电荷量需改变多少？

(2)计算当电压从 −5V 改变到 0V 时，电荷量需改变多少？

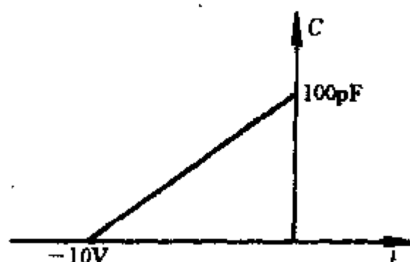



图 6-3

6—25　在给定电流密度下，导出正向电压与温度的函数关系。

6—26　已知 p-n 结接触电势差 $V_D=\frac{k_0T}{q}\ln\frac{N_AN_D}{n_i^2}$，试证明对硅 p-n 结而言：

$$\frac{dV_D}{dT}=\frac{k_0}{q}(\ln N_A\cdot N_D-3\ln T-107)$$

如果 $N_A=9\times10^{16}/cm^3$，$N_D=2\times10^{16}/cm^3$，分别计算 $T=300K, 400K, 500K$ 时的 $\frac{dV_D}{dT}$。($-1.72\times10^{-3}V/K$，$-1.8\times10^{-3}V/K$，$-1.86\times10^{-3}V/K$)

6—27　一个突变 p-n 结，由电阻率为 $2\Omega\cdot cm$ 的 p 型硅和电阻率为 $1\Omega\cdot cm$ 的 n 型硅组成，在室温 300K 时，试计算内建电位差 $V_D$ 和阻挡层宽度。已知 p 区中 $\mu_p=380cm^2/(V\cdot s)$，n 区中 $\mu_n=900cm^2/(V\cdot s)$。(0.68V，$4.87\times10^{-5}cm$)

# 第七章　金属-半导体接触

## 内 容 提 要

(1)典型的金属与半导体接触有两类，一类是整流接触，即制成肖特基势垒二极管(SBD)，另一类是非整流接触，即欧姆接触。

(2)定量计算肖特基接触的电流-电压特性，通常有两种理论分析方法，即扩散理论和热电子发射理论。前者适用于厚阻挡层，后者适用于薄阻挡层。常用的 Ge、Si、GaAs 材料，由于载流子的迁移率较高，其肖特基势垒的电流输运机构，主要是多数载流子的热电子发射。

(3)肖特基势垒二极管借助于热电子发射理论，导出其电流-电压特性为：

$$J = J_{sT}(e^{\frac{qV}{k_0T}} - 1)$$

式中，$J_{sT} = A^* T^2 e^{-\frac{q\phi_{ns}}{k_0T}}$

肖特基二极管高频特性好，开关速度快，正向导通电压低，由于是多子起作用，所以热噪声低。

(4)在金属与 n 型半导体形成的整流接触上加正向电压时，就有空穴从金属流向半导体，这种现象叫做少数载流子注入。注入的强弱用注入比 $r$ 表示。

对于 n 型半导体阻挡层的注入比：

$$r = \frac{qn_i^2 D_p}{N_D L_p A^* T^2 e^{-\frac{q\phi_{ns}}{k_0T}}}$$

(5)欧姆接触是设计和制造超高频，大功率器件的关键问题，主要是利用隧道效应原理在半导体上制造欧姆接触。欧姆接触广泛地应用于半导体器件生产中。

## 问　　题

7—1　金属和半导体的功函数是如何定义的？半导体的功函数与哪些因素有关？

7—2　说明金属-半导体接触在什么条件下能形成接触势垒(阻挡层)？分析 n 型和 p 型半导体形成阻挡层和反阻挡层的条件？

7—3　分别画出 n 型和 p 型半导体与金属接触时的能带图(分为 $W_s > W_m$，$W_s < W_m$，并忽略表面态的影响)。

7—4　半导体表面态是怎样影响势垒高度的？分别讨论受主型表面态和施主型表面态的影响。

7—5　什么叫欧姆接触？实现半导体-金属的欧姆接触有几种方法？简要说明其物理

原理。

7—6　应该怎样制做n型硅和金属铝接触才能实现(1)欧姆接触；(2)整流接触。

7—7　试比较p-n结和肖特基结的主要异同点。指出肖特基二极管具有哪些重要特点。

7—8　为什么金属-半导体二极管(肖特基二极管)消除了载流子注入后的存贮时间？

7—9　为什么对轻掺杂的p型半导体不能用四探针方法测量其电阻率？对轻掺杂的n型半导体如何分析其物理过程。

7—10　什么叫少数载流子注入效应？

7—11　镜象力和隧道效应是如何影响金属-半导体接触势垒的？

7—12　比较扩散理论和热电子发射理论在解决肖特基二极管整流特性时其主要区别在什么地方？

7—13　金属与重掺杂的半导体接触能够形成欧姆接触，说明其物理原理。

7—14　画图说明肖特基势垒高度，并指出在一般情况下，它与哪些物理量有关？

7—15　选择正确答案填入题中空白处：

(1)考虑一个真实的金属-半导体接触：铝和n型硅。设硅中杂质浓度$N_D=10^{14}/cm^3$，铝的函数$W_m=4.25eV$，半导体的功函数为4.3eV，因为$W_m<W_s$，所以这个金属-半导体接触是____________。

(a)n型反阻挡层；

(b)势垒高度为0.07eV的n型阻挡层；

(c)势垒高度为0.07eV的p型阻挡层；

(d)势垒高度不为0.07eV的n型阻挡。

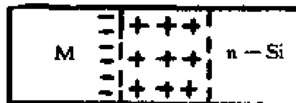



图7-1

(2)某金属和n型硅接触形成如图7-1所示的n型阻挡层，因为半导体一侧带正电荷，而金属一侧带负电荷，所以半导体的表面势为____________。

(a)正；

(b)负；

(c)势垒高度$qV_D$除以$q$；

(d)把电子从表面移至半导体内，外力所做的功。

7—16　画出界面态与半导体表面交换电荷以后处于热平衡时的能带图。标明电场$E$的方向，$E_C$和$E_F$的走向。

7—17　指出影响肖特基势垒正向电流的因素。

7—18　说明利用金属-半导体接触测量半导体表面层杂质浓度分布的原理并推导：

$$N(x)=\frac{C^3}{qA_j^2\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{1}{-\frac{dC_j}{dV}}\right)$$

式中，$C_j$为电压$V$时的势垒微分电容；$A_j$为结面积。

## 解题示例

**例1**　设p型硅(如图7-2)，受主浓度$N_A=10^{17}/cm^3$，试求：

(1)室温下费米能级 $E_F$ 的位置和功函数 $W_s$；

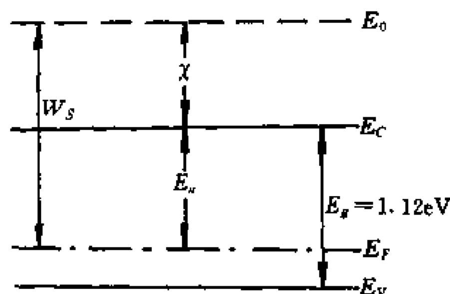



图 7-2

(2)不计表面态的影响，该 p 型硅分别与铂和银接触后是否形成阻挡层？

(3)若能形成阻挡层，求半导体一边势垒高度。

已知：$W_{Ag}=4.81\text{eV}$　　$W_{Pt}=5.36\text{eV}$

$N_v=10^{19}/\text{cm}^3$　　$E_g=1.12\text{eV}$；硅电子亲合合能 $\chi=4.05\text{eV}$

〔解〕 (1)室温下，可认为杂质全部电离，若忽略本征激发

则

$$p_0=N_A=N_v e^{-\frac{E_F-E_v}{k_0T}}$$

得：

$$E_F=E_v+k_0T\ln\frac{N_v}{N_A}=E_v=0.026\ln\frac{10^{19}}{10^{17}}$$

$$=E_v+0.12(\text{eV})$$

$$E_n=E_g-0.12$$

$$=1.12-0.12$$

$$=1.0(\text{eV})$$

∴ 功函数

$$W_s=E_n+\chi=1.0+4.05$$

$$=5.05(\text{eV})$$

(2)不计表面态的影响。对 p 型硅，当 $W_s>W_m$ 时，金属中电子流向半导体，使得半导体表面势 $V_s>0$，空穴附加能量 $qV_s$，使得能带向下弯，形成空穴势垒。所以，p 型硅和银接触后半导体表面形成空穴势垒，即空穴阻挡层。又因 $W_{Pt}=5.36\text{eV}>W_s=5.05\text{eV}$，所以 p 型硅和铂接触后不能形成阻挡层。

(3)银和 p-Si 接触形成的阻挡层其势垒高度：

$$qV_D=W_m-W_s=4.81-5.05=-0.24(\text{eV})$$

**例 2** 有〔100〕晶向的 n 型单晶硅片和某一金属接触形成肖特基二极管，其参数为 $W_m=4.7\text{eV}$，$\chi_s=4.0\text{eV}$，$N_c=10^{19}/\text{cm}^3$，$N_D=10^{15}/\text{cm}^3$，半导体硅的相对介电常数为 $\varepsilon_r=12$，忽略表面态的影响，计算室温下：

(1)零偏时势垒高度接触电势差和势垒宽度；

(2)正偏为 0.2V 时的热发射电流。设 $\frac{A^*}{A}=2.1$，$A=120\text{A/cm}^2$。

〔解〕 (1)由 $N_D=n_0=N_c e^{-\frac{E_C-E_F}{k_0T}}$可求得：

$$E_C - E_F = k_0T\ln\frac{N_C}{N_D} = 0.026\ln\frac{10^{19}}{10^{16}} = 0.17(\text{eV})$$

∴ $$W_s = \chi_s + (E_C - E_F) = 4.17(\text{eV})$$

势垒高度： $$qV_D = W_m - W_s = 4.7 - 4.17 = 0.53(\text{eV})$$

自建电势差： $$V_D = 0.53\text{V}$$

势垒宽度： $$d = \left(\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0V_D}{qN_D}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2\times12\times8.85\times10^{-14}\times0.53}{1.6\times10^{-19}\times10^{16}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2.6\times10^{-5}(\text{cm})$$

(2) $$q\phi_{ns} = qV_D + E_n = 0.53 + 0.17 = 0.7(\text{eV})$$

∴ $$J = A^* T^2 e^{-\frac{q\phi_{ns}}{k_0T}}(e^{\frac{qV}{k_0T}}-1)$$

$$=2.1\times120\times(300)^2 e^{-\frac{0.7}{0.026}}(e^{\frac{0.2}{0.026}}-1)$$

$$=8.4\times10^{-2}(\text{A/cm}^2)$$

**例 3** 施主浓度 $N_D=10^{17}/\text{cm}^3$ 的 n 型硅(如图 7-3)，室温下功函数是多少？若不考虑表面态的影响，它分别同 Al、Au、Mo 接触时，是形成阻挡层还是反阻挡层？硅的电子亲合能取 4.05eV。设 $W_{Al}=4.18\text{eV}$，$W_{Au}=5.20\text{eV}$，$W_{Mo}=4.21\text{eV}$。

〔解〕 设室温下杂质全部电离：

则 $$n_0=N_D=N_Ce^{-\frac{E_C-E_F}{k_0T}}$$

∴ $$E_F=E_C+k_0T\ln\frac{N_D}{N_C}$$

$$=E_C+0.026\ln\frac{10^{17}}{2.8\times10^{19}}$$

$$=E_C-0.147(\text{eV})$$

即 $$E_F\approx E_C-0.15(\text{eV})$$

∴ n-Si 的功函数为：

$$W_s = \chi + (E_C - E_F) = 4.05 + 0.15 = 4.20(\text{eV})$$

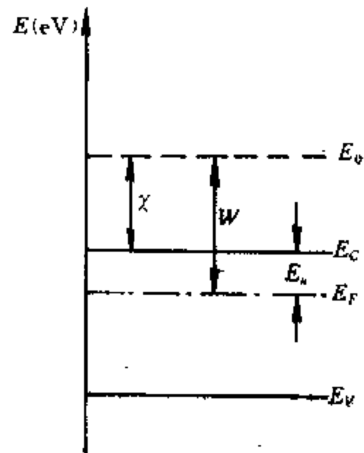



图 7-3

已知：$W_{Al}=4.18\text{eV}$，∴ $W_{Al}<W_s$，故二者接触形成反阻挡层。

$$W_{Au} = 5.20\text{eV}, W_{Mo} = 4.21\text{eV}$$

显然，$W_{Au}>W_{Mo}>W_s$

故 Au 与 n-Si 接触，Mo 与 n-Si 接触均形成阻挡层。

**例 4** 受主浓度 $N_A=10^{17}/\text{cm}^3$ 的 p 型锗(如图 7-4)，室温下功函数为多少？若不考虑表面态的影响，它分别同 Al、Au、Pt 接触时形成阻挡层还是反阻挡层？锗的电子亲合能取 4.13eV。设 $W_{Al}=4.18\text{eV}$，$W_{Au}=5.20\text{eV}$，$W_{Pt}=5.43\text{eV}$。

〔解〕 设室温下杂质全部电离

则 $$p_0=N_A$$

$$=N_v e^{-\frac{E_F-E_v}{k_0T}}$$

$\therefore$
$$E_F = E_v + k_0T\ln\frac{N_v}{N_A}$$
$$= E + 0.026\ln\frac{6\times10^{18}}{10^{17}}$$
$$= E_v + 0.11(\text{eV})$$

$\therefore$ 该 p 型锗的功函数为：

$$W_s = \chi + E_n = \chi + E_g - (E_F - E_v) = 4.13 + 0.67 - 0.11$$
$$= 4.69(\text{eV})$$

已知：$W_{Al} = 4.18\text{eV}$

显然：$W_s > W_{Al}$ 形成 p 型阻挡层

$$W_{Au} = 5.20\text{eV} \qquad W_{Pt} = 5.43\text{eV}$$

显然二者的功函数均大于 $W_s$，故该 p—Si 和 Au，Pt 接触形成 p 型反阻挡层。

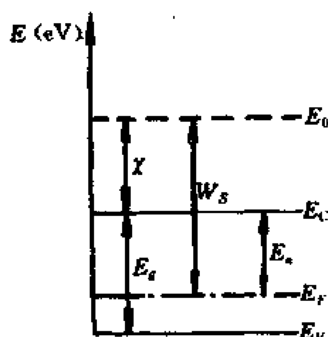



图 7-4

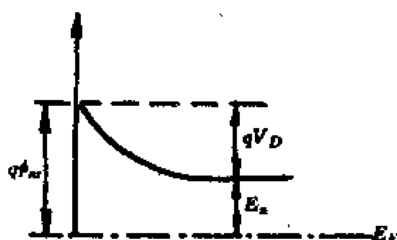



图 7-5

**例 5** 有一块施主浓度 $N_D = 10^{16}/\text{cm}^3$ 的 n 型锗材料（如图 7-5），在它的（111）面上与金属接触制成肖特基势垒二极管。已知：$V_D = 0.4\text{V}$，求加上 0.3V 电压时的正向电流密度。

〔解〕 考虑到镜象力的影响，势垒高度降低量为：

$$q\Delta\phi = \frac{1}{4}\left[\frac{2q^7N_D}{\pi^2\varepsilon_r^3\varepsilon_0^3}(V_D - V)\right]^{\frac{1}{4}}$$

代入数据后：

$$q\Delta\phi = \frac{1}{4}\left[\frac{2\times(1.6\times10^{-19})^7\times10^{16}}{3.14^2\times16^3\times(8.85\times10^{14})^3}\times(0.4-0.3)\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2\times26.84\times10^{-133}\times10^{16}\times10^{-1}}{4\times10^4\times6.9\times10^2\times10^{-42}}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}(1.9\times10^{-82})^{\frac{1}{4}} = 9.3\times10^{-22}(\text{J})$$

$\therefore$
$$\Delta\phi = 9.3\times10^{-22}/1.6\times10^{-19}$$
$$= 5.8\times10^{-3}\approx 0.006(\text{V})$$

故实际势垒高度 $q(V_D - \Delta\phi) = q(0.4 - 0.006) = 0.394(\text{eV})$

$\therefore$ 正向电流密度 $J = A^* T^2 e^{-\frac{q\phi_{ns}}{k_0T}}(e^{\frac{qV}{k_0T}} - 1)$

$$\because \quad E_n = E_c - E_F = k_0 T \ln \frac{N_c}{n_0}$$

$$= 0.026 \ln \frac{0.4\times 10^{19}}{10^{16}}$$

$$= 0.18(\text{eV})$$

$$\therefore \quad q\phi_{ns} = qV_D + E_n$$

$$\approx 0.574(\text{eV})$$

$A^* = 1.11A = 1.11\times 120\text{A/cm}^2\cdot\text{k}^2$

$$\therefore \quad J = 1.11\times 120\times 300^2 \times e^{-\frac{0.574}{0.026}}(e^{\frac{0.3}{0.026}} - 1)$$

$$= 316.8(\text{A/cm}^2)$$

## 习　　题

7—1　金属和n型半导体接触。已知半导体中施主浓度 $N_D=10^{16}/\text{cm}^3$，相对介电系数 $\varepsilon_{rs}=16$，接触电势 $V_{s0}=-0.5\text{V}$，当加上 10V 的反向偏压时。求：(1)势垒高度；(2)单位面积电容；(3)势垒区中最大场强；设 $\varepsilon_0=8.85\times 10^{-12}\text{F/m}$。

7—2　有一均匀掺杂非简并n型Si片，其电阻率为 $\rho$，设Si表面具有连续分布的表面能级(即表面态)，其密度为均匀的，设为 $N_{ss}/(\text{cm}^2\cdot\text{eV})$，且认为当电子填充到 $E_{s0}(\text{eV})$ 时表面呈中性，已知满足耗尽层近似条件，求当平衡时形成的自由表面势垒高度。

7—3　具有功函数分别为 3eV 和 4eV 的两种金属，其表面相距 10Å，计算室温下平衡时面电荷密度。

7—4　一功函数为 3eV 的金属与一n型半导体相联接，已知半导体的电子亲合势为 1eV，其电子浓度为 $10^{16}/\text{cm}^3$，介电系数 $\varepsilon_{rs}=12$，试计算：

(1)外加电压为0时，势垒单位面积上的电容；

(2)当外加反向偏压为 5V 时势垒单位面积上的电容。

7—5　在电阻率为 $10\Omega\cdot\text{cm}$ 的p型硅衬底上生长一层厚为 $2.5\mu\text{m}$ 的n型外延层，其施主浓度 $N_D=5\times 10^{16}/\text{cm}^3$，外延层与Pt接触，忽略所有边界效应。

(1)Pt-Si接触金属一侧的势垒高度为 0.85eV，求接触电势差？

(2)反向偏置Pt-Si结，外加多大电压就能使Pt接触下外延层完全耗尽？

(3)画出整个结构的能带图。

7—6　n型半导体掺施主浓度 $N_D=10^{16}/\text{cm}^3$，和某金属接触形成肖特基二极管，其结面积 $A=0.01\text{cm}^2$，设自建电势 $V_D=0.7\text{V}$，当外加反偏压 $V_R=10.3\text{V}$ 时，计算：

(1)耗尽层厚度；　　(1.2μm)

(2)势垒电容；　　(87pF)

(3)表面处电场强度。　　($1.84\times 10^5\text{V/cm}$)

7—7　n型硅的掺杂浓度为 $10^{15}/\text{cm}^3$，表面态均匀分布，其密度为 $D_{ss}=10^{12}/(\text{cm}^2\cdot\text{eV})$，表面态的中性能级在 $E_v+0.3\text{eV}$，求其表面势(提示：首先求 $E_F$ 和表面中性能级的差，表面态上的电荷必定等于根据由表面势决定的耗尽层电荷)($|V_s|=0.48\text{V}$)。

7—8　计算施主浓度为 $10^{16}/\text{cm}^3$ 的n型半导体和金属接触形成的势垒宽度及其电容，设扩散电势 $V_D=1\text{V}$，半导体介电常数 $\varepsilon_r=15$。($4.08\times 10^{-5}\text{cm}$, $3.11\times 10^{-8}\text{F/cm}^2$)

7—9　一掺杂浓度为 $10^{15}/cm^3$ 的 n 型硅〔111〕面与功函数 $W_m=5.0eV$ 的金属接触形成肖特基二极管，半导体电子亲合势 $\chi=4.05eV$，导带状密度 $N_C=10^{19}/cm^3$，$\varepsilon_r=11.8$，忽略界面态的影响，计算室温下：

(1)势垒高度，接触电势差和零偏压时耗尽层宽度(0.95eV，0.62V，0.96μm)；

(2)正向电压为 0.3V 时热发射电流($0.12mA/cm^2\times2.2$)。

7—10　某金属-n 型半导体接触，其金属一边的势垒高度为 0.8eV，设有效的理查逊常数 $A^*=10^2A/cm^2\cdot K^2$，禁带宽度 $E_g=1.1eV$；$N_D=10^{16}/cm^3$，导带和价带的有效状态密度 $N_C=N_v=10^{19}/cm^3$。

(1)计算室温下半导体在零偏压时的接触电势差；

(2)假设空穴的扩散系数 $D_p=15cm^2/s$，扩散长度 $L_p=10μm$，计算注入的多子电流和少子电流的比值(即注入比)($4.2\times10^4$)。

7—11　计算室温下金和 n-GaAs 接触形成的肖特基势垒的多子电流和少子电流的比值。设半导体的施主浓度为 $10^{15}/cm^3$，空穴扩散长度 $L_p=1μm$，有效理查逊常数 $A^*=0.068\times120A/(K^2\cdot cm^2)$($5.04\times10^4$)。

7—12　(1)推导肖特基二极管$\frac{dV}{dT}$作为电流密度函数的表示式。忽略少子电流的影响。

(2)设室温下外加电压 $V=0.25V$，势垒高度 $qV_D=0.7eV$，计算温度系数(−1.67mV/℃)。

7—13　利用图 7-6 所给曲线计算：钨-硅接触形成的肖特基势垒高度，接触电势差和半导体的掺杂浓度。设 $\varepsilon_r=11.8$，$N_C=2.8\times10^{19}/cm^3$，结面积 $A=1cm^2$(0.64eV；0.4V；$2.6\times10^{15}/cm^3$)。

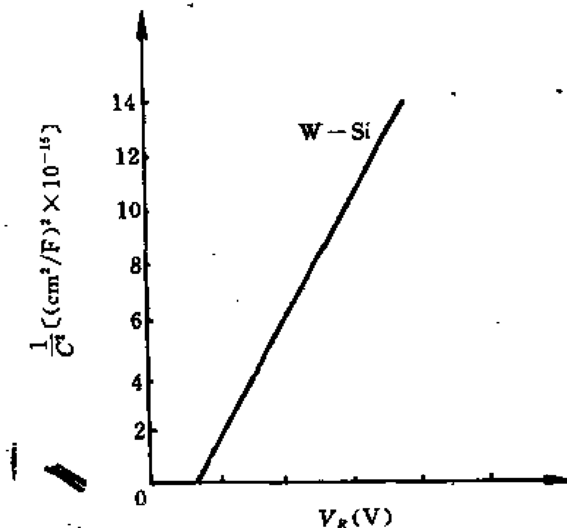



图 7-6

7—14　在一个掺杂浓度为 $10^{14}/cm^3$ 的硅片上蒸发一个面积为 $10^{-3}cm^2$ 的金点，作成了一个肖特基二极管，其电流和电压关系恰好表示成：

$$I = I_0(e^{\frac{qV}{k_0T}} - 1)$$

试问该半导体是 p 型硅还是 n 型硅?

7—15　由硅和金属接触形成的肖特基二极管,其结面积在显微镜下测得为 $10^{-4}$ $cm^2$,实验测得结电容和外加电压的函数关系为:

$$\frac{1}{C^2} = 0.70 \times 10^{24} - 1.2 \times 10^{24}(V)$$

(电容单位为法拉,电压在 0 ～ 10V 之间变化。)

已知室温下漏电流为 $10^{-12}$A,求:接触电势差,零偏时势垒宽度和半导体的掺杂浓度。

# 第八章　半导体表面与MIS结构

## 内容提要

(1)由于真实晶体的线度是有限的，所以晶体势场的周期性条件在晶体表面受到破坏，导致在晶体表面禁带内出现表面能级(或塔姆能级)即表面态。表面态也可看成是晶体表面最外层原子未被饱和的键(悬挂键)所对应的电子能态。表面态数目和性质取决于表面处理工艺以及外界条件(如温度、气氛等)。

(2)在电场与其他物理效应作用下，半导体表面层内载流子会发生变化，产生表面势，导致表面能带弯曲。半导体表面电场的方向不同，导致半导体表面出现积累层，耗尽层或反型层。

(3)半导体表面电场可以通过求解泊松方程进行具体分析。对于耗尽状态可以用"耗尽近似"处理。耗尽层的厚度和半导体的掺杂浓度 $N$ 及表面势 $V_s$ 有关。表达式为：

$$x_d = \left(\frac{2q\varepsilon_r\varepsilon_0 V_s}{qN}\right)^{\frac{1}{2}}$$

半导体表面空间电荷层中单位面积的电量为 $Q_s = -qNx_d$($N$ 为半导体的掺杂浓度)。

半导体表面发生强反型的条件为(以 p 型半导体为例)：

$$V_s \geqslant 2V_B \quad (qV_B = E_i - E_F)$$

式中

$$V_B = \frac{k_0T}{q}\ln\frac{N_A}{n_i}。$$

(4)硅-二氧化硅系统的特性与 $SiO_2$ 层中带电情况密切相关。主要的带电形式有：固定表面电荷 $Q_{fc}$，可动的杂质离子(通常是 $Na^+$、$K^+$、$Li^+$、$H^+$，其中最主要的是 $Na^+$)及界面态。这些表面电荷的存在显著地改变了半导体表面势，对器件的稳定性和可靠性影响很大。

(5)为了解半导体的表面状态，获得有关绝缘层中电荷，界面态以及金属与半导体功函数差等一系列重要数据可以利用 MIS 电容器的 $C$-$V$ 特性和 $B$-$T$ 试验。

考虑到功函数差及绝缘层中电荷两种因素都存在时，平带电压为：

$$V_{FB} = -V_{ms} - \frac{1}{C_0}\int_0^{d_0}\frac{x\rho(x)}{d_0}\mathrm{d}x$$

(6)表面电场对 p-n 结电学性能有显著的影响，通常是用栅控二极管来进行研究。

(7)半导体表面载流子的有效迁移率不同于体内的数值。一般表面载流子有效迁移率比体内迁移率约低一半。表面散射机构比较复杂，一般认为有"镜面反射"和"漫反射"两种机构。实验发现表面有效迁移率与温度成负的指数关系。即：$\mu_s \propto T^{-\frac{3}{2}}$

## 问　题

8—1　什么是空间电荷区？如何才能在半导体表面形成正的空间电荷区和负的空间电荷区？

8—2　说明表面势 $V_s$ 的物理意义，如何才能保证 $V_s>0$ 和 $V_s<0$？

8—3　为什么半导体表面的能带会发生弯曲？说明能带向上弯和向下弯的条件？

8—4　能带弯曲以后，形成电子势垒还是空穴势垒，如何判断之。在能带图上讨论 n 型半导体和表面空间电荷的关系。

8—5　半导体表面积累、耗尽、本征和反型的物理意义是什么？分析 n 型半导体和 p 型半导体形成上述几种状态的条件，以图示意之。

8—6　为什么 $SiO_2$ 层下面的 p 型硅表面有自行变为 n 型的倾向？

8—7　分别对 n 型衬底和 p 型衬底 MOS 结构，画出在外加偏压条件下 MOS 结构中对应于载流子在积累、耗尽，强反型时能带和电荷分布图。

8—8　区别栅电压($V_G$)，阈值电压($V_T$)，平带电压($V_{FB}$)的不同，并说明它们之间的关系。

8—9　画出 MOS 结构的等效电路，写出 MOS 的电容表达式(包括归一化电容的表达式)。

8—10　分别绘出理想 MOS 结构(n 型和 p 型衬底)的高频，低频电容-电压特性曲线，并逐段解释电容 $C$ 随电压变化的物理原因。

8—11　光照和温度变化对高频 $C$-$V$ 曲线有何影响，定性予以解释。

8—12　设在实际 MOS 结构中存在可动离子，固定电荷，快界面态电离辐射陷阱和金-半功函数差，说明每种情况对 MOS 结构 $C$-$V$ 特性的影响。

8—13　说明平带电压 $V_{FB}$ 的物理意义？如何利用 $V_{FB}$ 和 $d_{0x}$(氧化层厚度)的关系求金属-半导体功函数差。

8—14　在忽略界面态影响情况下，可以用什么试验方法测量 MOS 结构氧化层中固定电荷与可动电荷，说明试验方法及有关公式。

8—15　说明强反型状态出现以后，为什么栅电压 $V_G$ 的变化只能引起 $E_F$ 对表面禁带相对位置很小的变化？

8—16　平衡态 $C$-$V$ 曲线和非平衡态 $C$-$V$ 曲线有何差别？为什么非平衡态的 $\frac{C}{C_0}$-$V_G$ 曲线是耗尽状态 $\frac{C}{C_0}$-$V_G$ 曲线的延续？

8—17　从无定形 $SiO_2$ 薄膜的结构和钠离子性质，说明钠离子在 $SiO_2$ 中容易漂移的原因。

8—18　讨论界面态对 $C$-$V$ 曲线的影响。如图 8-1 所示曲线中分($a$)，($b$)，($c$)三个区域讨论。

8—19　考虑温度的影响后，一 p 型衬底 MOS 结构的 $C$-$V$ 曲线平移(如图 8-2 所示)，说明这一变化过程的物理因素。

8—20　实验发现，低温下 MOS 结构的阈压 $V_G$ 的变化速率同界面态发射电子的速率

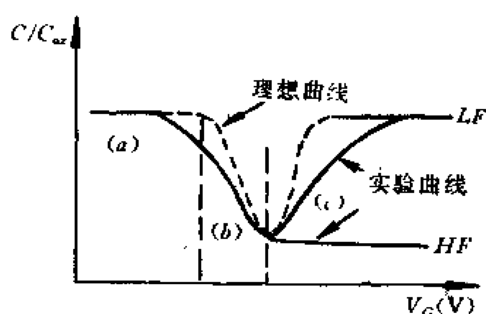



图 8-1

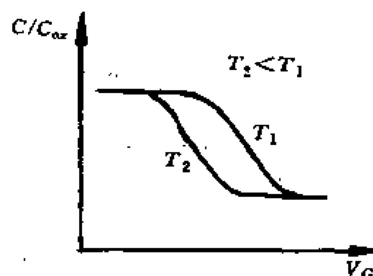



图 8-2

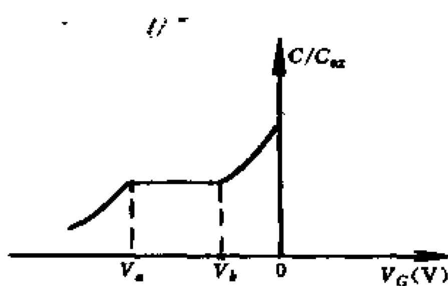



图 8-3

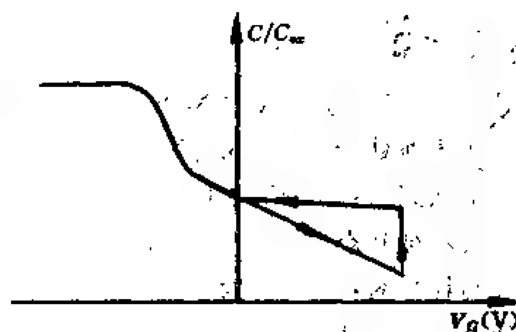



图 8-4

相等时，MOS 结构的 $C$-$V$ 曲线在耗尽区出现一段不随偏压变化的平坦部分，这一现象称为平台效应(如图 8-3 所示)。试定性解释这一现象。

8—21　MOS 结构(p 型衬底)的高频 $C$-$V$ 曲线出现如图 8-4 所示的非正常现象。分析可能由哪些原因引起的？

8—22　证明 n 型衬底 MOS 结构的阈值电压 $V_T$ 随温度变化有如下关系：

$$\frac{dV_T}{dT}=\frac{1}{T}\left(2-\frac{Q_s}{2C_0V_s}\right)\left(V_s-\frac{E_g}{2q}\right)$$

据此讨论阈值电压 $V_T$ 随温度增加是升高还是减少？衬底浓度和氧化层厚度如何影响 $V_T$ 的变化？

8—23　MOS 结构的平带电容 $C_{FB}$的精确计算证明它小于氧化层电容 $C_0$，对此事实作一解释。

8—24　用耗尽近似方法推导半导体表面耗尽层的表面势，厚度和空间电荷的表示式。

8—25　利用栅控二极管 $I_R$-$V_G$ 曲线设计出测量表面产生速度 $S_g$ 和耗尽区产生寿命 $\tau_g$ 的实验方法。

8—26　图 8-5 所示是一个 n 型半导体的 MOS 电容器，在其上加一电压 $V(t)$，$V(t)$随时间的变化如图所示。试定性分析，电压 $V(t)$的变化率需满足什么条件时，才能保证由 0→$t_1$时间内耗尽层宽度增加不受最大耗尽层宽度的限制(忽略表面复合和击穿电压的限

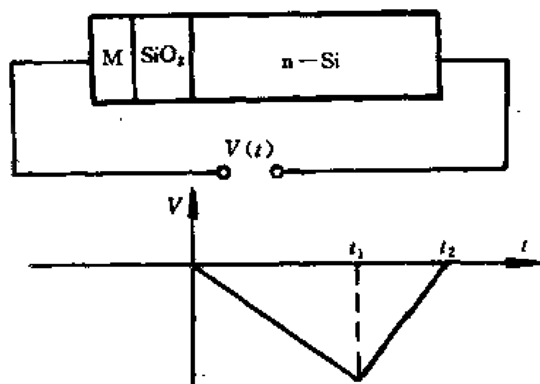



图 8-5

制），用能带说明在此情况下表面反型电荷何时达到极大值。

8—27　某 n 型衬底的 MOS 电容器，半导体掺杂浓度 $N_D=10^{17}/\text{cm}^3$，$V_{FB}=-0.41\text{V}$，故半导体表面处于多子堆积状态时：$V_G-V_{FB}$为（正值），$V_s$（>0）；按照此例填写下列括号：

平带状态时：$V_G-V_{FB}$为（　　　），$V_s$（　　　）；

表面本征状态时：$V_G-V_{FB}$为（　　　），$V_s$（　　　）；

表面耗尽时：$V_G-V_{FB}$为（　　　），$V_s$（　　　）；

强反型临界状态时：$V_G-V_{FB}$为（　　　），$V_s$（　　　）；

强反型状态时：$V_G-V_{FB}$为（　　　），$V_s$（　　　）。

8—28　用四探针方法测量轻掺杂 p 型半导体样品的电阻率是难于做到的，然而此方法用于 n 型半导体样品却没有问题。试解释这一现象。

8—29　对一 p 型衬底的 MOS 结构，在积累情况下，空间电荷区内的电荷密度近似为：

$$\rho(x)=qp_{p_0}(e^{-\frac{qV}{k_0T}}-1)$$

根据泊松方程，导出积累情况下，空间电荷区电容 $C_0$ 和平带电容 $C_{FB}$的表达式。

## 解题示例

**例 1**　设在金属与 n 型半导体之间加一电压，且 n-Si 接高电位，金属接低电位，使半导体表面层内出现耗尽状态（如图 8-6 所示）。

（1）求耗尽层内电势 $V(x)$；

（2）若表面势 $V_s=0.4\text{V}$；外加电压为 5V，施主浓度 $N_D=10^{16}/\text{cm}^3$，求耗尽层厚度。设$\varepsilon_{rs}=12$，$\varepsilon_0=8.85\times10^{-14}\text{F/cm}$。

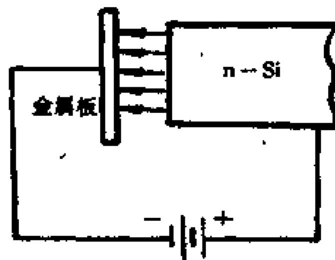



图 8-6

〔解〕（1）根据耗尽近似，即假设空间电荷层的电子都已全部耗尽，电荷全由已电离的施主杂质构成，设掺杂是均匀的，则空间电荷层的电荷密度 $\rho(x)=qN_D$，

故泊松方程可写为：

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{-qN_D}{\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}$$

设 $x=x_d$ 为耗尽层宽度，则因半导体内部场强为零，有：

$$E(x) = -\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_d} = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{+qN_D}{\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}(x_d - x)$$

设体内电势为 0，即 $x=x_d$，$V=0$，积分上式得：

$$V(x) = \frac{qN_D(x_d - x)^2}{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}$$；式中 $x = 0$ 时，即为 $V_s$。

(2)当加电压为 $V$ 时，表面势由 $V_s$ 提高为 $V_s+V$，

∴ 外加电压 $V$ 以后 $V_s+V=\dfrac{qN_Dx_d^2}{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}$

$$x_d = \left[\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0(V_s + V)}{qN_D}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{2 \times 12 \times 8.85 \times 10^{-14} \times (10.4 + 5)}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{10}}\right]$$

$$= 8.3 \times 10^{-5}(\text{cm})$$

**例 2** 用 n 型硅单晶片做为衬底制成 MOS 二极管。铝电极面积 $A=1.6\times10^{-7}\text{m}^2$。在 150℃下进行负 $B$-$T$ 和正 $B$-$T$ 处理。分别测得如图 8-7 所示的 $C$-$V$ 曲线(1)(2)。求：在硅-二氧化硅界面处的正电荷面密度和二氧化硅中的可动离子的面密度。

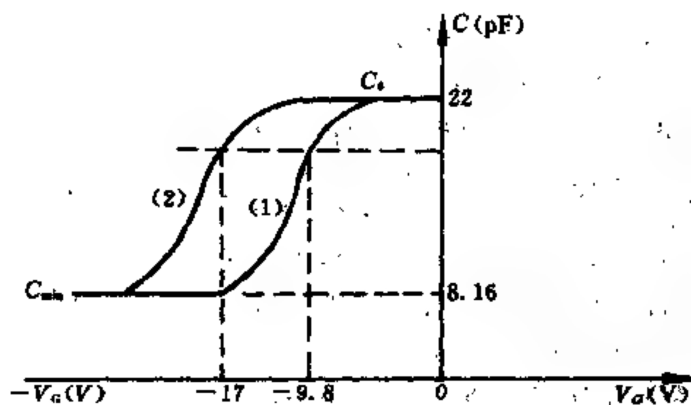



图 8-7

〔解〕 由图示的 $C$-$V$ 曲线可查得：

$C_0 = 22(\text{pF})$  $C_{min} = 8.16(\text{pF})$

(1)$SiO_2$ 层厚度：

$$d_0 = \frac{A\varepsilon_0\varepsilon_r}{C_0} = \frac{1.6 \times 10^{-7} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 3.9}{22 \times 10^{-12}}$$

$$= 2.5 \times 10^{-7}(\text{m}) = 2500\text{Å}$$

(2)∵ $\frac{C_{min}}{C_0}=\frac{8.16}{22}=0.371$

又 $$\left(\frac{C_{min}}{C_0}\right)^2=\frac{1}{1+\frac{2\varepsilon_{r0}}{q\varepsilon_{rs}d_0}\left\{\frac{\varepsilon_{rs}\varepsilon_0 k_0 T}{N_A}\ln\left(\frac{N_D}{n_i}\right)\right\}}$$

故可以代入计算，但相当麻烦。

另外一种方法是查阅有关曲线，见教材 213 页，图 8-12。

可查得： $N_D=5\times10^{14}/cm^3$

(3)由 $\frac{C_{FB}}{C_0}=\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rs}}\left(\frac{\varepsilon_{rs}\cdot k_0T}{q^2N_Ad_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$ 可以计算，也可查阅教材图 8-11 曲线求得：$\frac{C_{FB}}{C_0}=0.82$

∴ $$C_{FB}=0.82C_0=0.82\times22=18(pF)$$

(4)已知：$W_s(N_D=5\times10^{14})=4.30eV$  $W_{Al}=4.20eV$

∴ $$V_{ms}=-0.1V$$

(5)根据图中给出的曲线

$$V_{FB}=-17V \qquad V'_{FB}=-9.8V$$

$$\Delta V_{FB}=V'_{FB}-V_{FB}=-9.8+17=7.2V$$

因此 $N_{fc}=\frac{C_i}{A\cdot q}(V_{ms}-V'_{FB})$（即计算固定电荷密度比较严格的方法是从作过负温偏处理后测的 $C$-$V$ 特性来定 $V_{FB}$）

$$N_{fc}=\frac{C_i}{A\cdot q}(V_{ms}-V_{FB})$$

$$=\frac{22\times10^{-12}}{1.6\times10^{-7}\times1.6\times10^{-19}}(-0.1+9.8)$$

$$=8.29\times10^{15}个/m^2$$

$$=8.29\times10^{9}个/cm^2$$

计算可动离子面密度由正负温偏处理之间的 $V_{FB}$ 的偏移量来计算。

$$N_m=\frac{C_0\Delta_{FB}}{A\cdot q}=\frac{22\times10^{-12}}{1.6\times10^{-7}\times1.6\times10^{-19}}\times7.2$$

$$\approx6.2\times10^{15}个/m^2=6.2\times10^{9}个/cm^2$$

**例 3** 试导出使表面恰为本征时表面电场强度，表面电荷密度和表面层电容的表示式（设 p 型硅情形），如图 8-8 所示。

〔解〕 当表面恰为本征时，即 $E_i$ 在表面与 $E_F$ 重合

∴ $$V_s=V_B$$

设表面层载流子浓度仍遵守经典统计。则

$$n_s=n_{p_0}e^{+\frac{qV_B}{k_0T}}$$

$$p_s=p_{p_0}e^{-\frac{2qV_s}{k_0T}}$$

∵ 表面恰为本征

∴ $$n_s=p_s=n_i$$

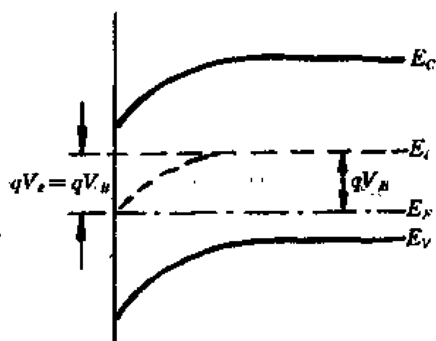



图 8-8

故
$$\frac{n_{p_0}}{p_{p_0}}=e^{-\frac{2qV_s}{k_0T}}$$

但 $p_{p_0}=N_A$ ∴ $n_{p_0}=\frac{n_i^2}{p_{p_0}}=\frac{n_i^2}{N_A}$

∴
$$\frac{n_{p_0}}{p_{p_0}}=\frac{n_i^2}{N_A^2}=e^{-\frac{2qV_s}{k_0T}}$$

取对数即得：
$$\frac{qV_s}{k_0T}=\ln\frac{N_A}{n_i}$$

∴ $F$ 函数：
$$F\left(\frac{qV_s}{k_0T}\cdot\frac{n_{p_0}}{p_{p_0}}\right)$$
$$=\left[\left(e^{-\frac{qV_s}{k_0T}}+\frac{qV_s}{k_0T}-1\right)+\frac{n_{p_0}}{p_{p_0}}\left(e^{\frac{qV_s}{k_0T}}-\frac{qV_s}{k_0T}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

∵ p 型硅，且 $V_s=V_B$

∴
$$qV_s=qV_B\gg k_0T$$

故
$$e^{-\frac{qV_s}{k_0T}}\ll 1,\ \frac{qV_s}{k_0T}\gg 1$$
$$e^{-\frac{2qV_s}{k_0T}}\ll 1 \qquad \frac{n_{p_0}}{p_{p_0}}\ll 1$$

∴
$$F\left(\frac{qV_s}{k_0T},\frac{n_{p_0}}{p_{p_0}}\right)=\left(\frac{qV_s}{k_0T}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\ln\frac{N_A}{n_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

因此：
$$\varepsilon_s=\frac{2k_0T}{qL_D}F\left(\frac{qV_s}{k_0T},\frac{n_{p_0}}{p_{p_0}}\right)$$
$$=\frac{2k_0T}{qL_D}\left(\ln\frac{N_A}{n_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$Q_s=-\frac{2\varepsilon_s\varepsilon_0k_0T}{qL_D}F\left(\frac{qV_s}{k_0T},\frac{n_{p_0}}{p_{p_0}}\right)$$
$$=-\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0k_0T}{qL_D}\left(\ln\frac{N_A}{n_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$C_s=\left|\frac{dQ_s}{dV_s}\right|=\frac{\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}{L_D}\frac{\left[\left(-e^{-\frac{qV_s}{k_0T}}+1\right)+\frac{n_{p_0}}{p_{p_0}}\left(e^{\frac{qV_s}{k_0T}}-1\right)\right]}{F\left(\frac{qV_s}{k_0T},\frac{n_{p_0}}{p_{p_0}}\right)}$$

故：
$$C_s=\frac{\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}{L_D}\frac{1}{\left(\ln\frac{N_A}{n_i}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

**例 4** 导出理想 MIS 结构的开启电压随温度变化的关系式。

〔解〕 设以 p-Si 为例，如图 8-9 所示。设开启电压：

$$V_T = V_0 + V_s$$

式中，$V_0$ 为绝缘层上的压降；$V_s$ 为半导体表面空间电荷区压降。

则：

$$V_T = -\frac{Q_s}{C_0} + V_s$$

半导体表面空间电荷区出现反型态，则其表面负电荷应由两部分组成：

① 电离受主电荷 $Q_A = -qN_A x_{dm}$，$x_{dm}$为空间电荷区宽度；

② 反型电子 $Q_n$。

可以证明：在开启时 $Q_A \gg Q_n$

∴ 半导体表面空间电荷区的电荷为耗尽层最大电荷。

即：

$$Q_s = -\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}{L_D}\left(\frac{k_0T}{q}\right)^{\frac{1}{2}}(V_s)^{\frac{1}{2}}$$

式中：$L_D = \left(\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0 k_0 T}{q^2 p_{p_0}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0 k_0 T}{q^2 N_A}\right)^{\frac{1}{2}}$

又 ∵

$$V_s = 2V_B = \frac{2k_0T}{q}\ln\frac{N_A}{n_i}$$

故

$$Q_s = -\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0}{\left(\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0 k_0 T}{q^2 N_A}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{k_0T}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2k_0T}{q}\ln\frac{N_A}{n_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{4\varepsilon_{rs}\varepsilon_0 k_0 T N_A \ln\frac{N_A}{n_i}}$$

∴

$$V_T = V_0 + V_s = -\frac{Q_s}{C_0} + V_s$$

$$= \frac{\left(4\varepsilon_{rs}\varepsilon_0 k_0 T N_A \ln\frac{N_A}{n_i}\right)^{1/2}}{C_0} + \frac{2k_0T}{q}\ln\frac{N_A}{n_i}$$

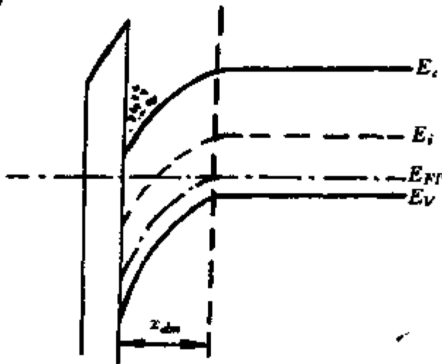



图 8-9 $V_G \gg 0$

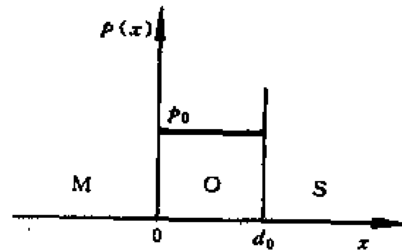



图 8-10

**例 5** 试计算下列情况下，平带电压的变化。

(1)氧化层中均匀分布着正电荷；

(2)三角形电荷分布，金属附近高，硅附近为零；

(3)三角形电荷分布，硅附近高，金属附近为零。

设三种情况下，单位表面积的总离子数都为 $10^{12}/cm^2$。氧化层厚度均为 0.2μm；$\varepsilon_{r_0}=3.9$，$\varepsilon_0=8.85\times10^{-14}$F/cm

〔解〕

(1)设氧化层中电荷密度为 $\rho_0$(如图 8-10 所示)：

∴ $dV_{FB}=-\frac{x\mathrm{d}Q}{d_0C_0}=-\frac{\rho_0x\mathrm{d}x}{d_0C_0}$(单位面积)

则：

$$V_{FB}=-\frac{1}{C_0d_0}\int_0^{d_0}\rho_0x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\rho_0}{C_0d_0}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{d_0}$$

$$=-\frac{\rho_0d_0}{2C_0}$$

又∵

$$Q=\int_0^{d_0}\rho_0\mathrm{d}x=\rho_0d_0=10^{12}\times1.6\times10^{-19}(\mathrm{C/cm^2})$$

∴

$$\rho_0=\frac{10^{12}\times1.6\times10^{-19}}{d_0}\quad 又\quad C_0=\frac{\varepsilon_{r0}\varepsilon_0}{d_0}$$

故

$$V_{FB}=-\frac{d_0}{2C_0}\cdot\frac{10^{12}\times1.6\times10^{-19}}{d_0}$$

$$=-\frac{d_0}{2\varepsilon_{r_0}\varepsilon_0}\times10^{12}\times1.6\times10^{-19}$$

$$=-\frac{0.2\times10^{-4}}{2\times3.9\times8.85\times10^{-14}}\times10^{12}\times1.6\times10^{-19}$$

$$=-4.6(\mathrm{V})$$

(2)三角形电荷分布，金属附近为高，硅附近为零，如图 8-11 所示。

设 $M$-$O$ 边界为 $x$ 坐标的原点

则

$$\rho(x)\Big|_{x=0}=\rho_0\qquad ∴\quad \rho(x)=\rho_0-\frac{\rho_0}{d_0}x$$

∴ 单位面积氧化层中总电荷

$$Q=\int_0^{d_0}\left(\rho_0-\frac{\rho_0}{d_0}x\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\rho_0}{2d_0}x^2\int_0^{d_0}\rho_0d_0$$

$$=\frac{1}{2}\rho_0d_0=10^{12}\times1.6\times10^{-19}(\mathrm{C/cm^2})$$

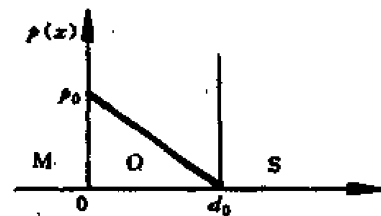



图 8-11

$$∴\quad V_{FB}=-\frac{Q}{C_0d_0}=-\frac{1}{C_0d_0}\int_0^{d}\left(\rho_0-\frac{\rho_0}{d_0}x\right)x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{C_0d_0}\left(\frac{1}{2}\rho_0d_0^2-\frac{\rho_0}{3d_0}d_0^3\right)$$

$$=-\frac{1}{C_0d_0}\left(\frac{1}{2}\rho_0d_0^2-\frac{1}{3}\rho_0d_0^2\right)=-\frac{\rho_0d_0^2}{6C_0d_0}$$

又∵

$$C_0=\frac{\varepsilon_{r0}\varepsilon_0}{d_0}$$

$\therefore \qquad V_{FB}=-\dfrac{\rho_0 d_0^2}{6\varepsilon_{r0}\varepsilon_0}$

代入数据得：

$$V_{FB}=\frac{2\times10^{12}\times1.6\times10^{-19}\times0.2\times10^{-4}}{6\times8.85\times10^{-14}\times3.9}$$

$$=-\frac{2\times1.6\times0.2}{6\times8.85\times3.9}\times10^{3}$$

$\therefore \qquad V_{FB}=-3.1(\text{V})$

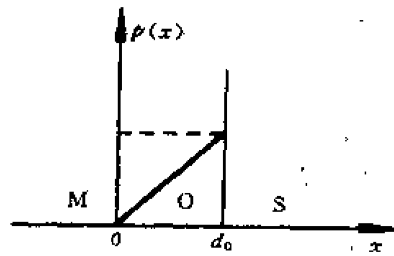


图 8-12

(3)三角形电荷分布，硅附近高，金属附近为零，如图 8-12 所示。

$$\rho(x)\Big|_{x=d_0}=\rho_0$$

则
$$\rho(x)=\frac{\rho_0}{d_0}x$$

$\therefore$
$$Q=\int_0^{d_0}\rho(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{d_0}\frac{\rho_0}{d_0}x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\rho_0 d_0=10^{12}\times1.6\times10^{-19}(\text{C/cm}^2)$$

$\therefore$
$$V_{FB}=-\frac{1}{C_0 d_0}\int_0^{d_0}\rho(x)x\mathrm{d}x=-\frac{1}{C_0 d_0}\int_0^{d_0}x\cdot\frac{\rho_0}{d_0}x\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\rho_0 d_0^3}{3C_0 d_0}=-\frac{\rho_0 d_0^2}{3\varepsilon_{r_0}\varepsilon_0}$$

代入数据得：

$$V_{FB}=-\frac{2\times10^{12}\times1.6\times10^{-19}\times0.2\times10^{-4}}{3\times3.9\times8.85\times10^{-14}}$$
$$=-6.2(\text{V})$$

**例 6** 一栅控 $p^+$-n 二极管的冶金结面积为$10^{-3}\text{cm}^2$，栅极与 n 区重叠面积为 $10^{-3}\text{cm}^2$，衬底杂质浓度为 $10^{16}/\text{cm}^3$，结深为 5μm，氧化层厚度为 0.2μm，寿命 $\tau=1\mu\text{s}$，表面复合速度 $s_0=5\text{cm/s}$，平带电压为$-2$V。试计算：

(1)衬底表面分别为本征和强反型时的栅电压(室温下结电压为零时)；

(2)$V_G=0,-20$V 的条件，$V_R=1$V 时室温下的反向电流。

(3)在与(2)同样的栅压下，$V_F=0.4$V 时的正向电流，并求出反向电流，正向电流和栅电压的函数关系。

〔解〕 (1)栅电压 $V_G=V_s+V_0+V_{FB}$时，衬底恰为本征。此时：

$$V_s=V_B=\frac{E_i-E_F}{q}$$

设杂质全部电离

$$n_0=N_D$$

$$N_D=n_0=n_i e^{-\frac{E_i-E_F}{k_0T}}$$

$\therefore \qquad V_s = \frac{E_i - E_F}{q} = -\frac{k_0T}{q}\ln\frac{n_0}{n_i}$

$$= \frac{-0.026}{q}\ln\frac{10^{15}}{1.5\times10^{10}} \approx -0.35(\text{V})$$

$SiO_2$ 层中的压降为： $V_0 = -\frac{Q_s}{C_0}$

表面耗尽状态，其电荷：

$$Q_s = qN_Dx_d = qN_D\sqrt{\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0(-V_s)}{qN_D}}$$

即： $Q_s = [2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0 qN_D(-V_s)]^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \qquad V_0 = -\frac{Q_s}{C_0} = -\frac{d_0}{\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}[2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0 qN_D(-V_s)]^{\frac{1}{2}}$

代入数据：

$$V_0 = \frac{0.2\times10^{-4}}{3.9\times8.85\times10^{-14}}(2\times11.6\times8.85\times10^{-12}$$

$$\times10^{22}\times0.35\times1.6\times10^{-19})^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{0.2\times10^{-4}}{34.5\times10^{-14}}\times(2.32\times8.85\times0.35\times1.6)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx -2(\text{V})$$

由题中条件知：$V_{FB} = -2\text{V}$

$\therefore \qquad V_G = V_s + V_0 + V_{FB} = -(0.35 + 2 + 2)$

$$= -4.35(\text{V})$$

当衬底为强反型时： $V_s = 2V_B = 0.35\times2 = -0.70(\text{V})$

$\because \qquad Q_s \propto V_s^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \qquad V_0 = \sqrt{2}V_0 = 1.414\times2 = 2.8(\text{V})$

$$V_{FB} = -2\text{V}$$

$\therefore \qquad V_G = V_s + V_0 + V_{FB} = -(0.70 + 2.8 + 2)$

$$= -5.5(\text{V})$$

(2) ①当 $V_G = 0, V_B = 1\text{V}$ 时，求室温时反向电流。

∵ $V_G = 0$，半导体表面为多子积累层(由于 $SiO_2$ 层中正电荷的影响)；

∴ 无场感应结，此时反向电流仅为通过冶金结耗尽区的产生电流。反向漂移电流 $I_s$ 是非常小的，可忽略不计。计算如下：

$\because \qquad I_s = J_{sA} = \frac{qD_pp_{n0}}{L_p} = \sqrt{\frac{k_0T\mu_pq}{\tau_p}}\cdot\frac{n_i^2}{N_D}\cdot A$

代入数据：

$$I_s = \sqrt{\frac{1.38\times10^{-23}\times300\times400\times1.6\times10^{-19}}{10^{-6}}}$$

$$\times\frac{(1.5\times10^{10})^2}{10^{16}}\times10^{-3}$$

$$= 1.1\times10^{-14}A = 1.1\times10^{-2}(\text{pA})$$

耗尽区产生电流：$I_gM = qG_{mj}x_dA_{mj} = q\frac{n_i}{2\tau}x_dA_{mj}$

设一般硅 p-n 结势垒 $V_D = 0.7V$

则
$$x_d = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0(V_D + V_r)}{qN_D}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \times 11.6 \times 8.85 \times 10^{-14} \times (0.7 + 1)}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{16}}}$$
$$= 4.7 \times 10^{-5}(\text{cm}) = 0.47\mu\text{m}$$

则
$$I_{gM} = q\frac{n_i}{2\tau}x_dA_{mj} = 1.6 \times 10^{-19} \times \frac{1.5 \times 10^{10}}{2 \times 10^{-6}} \times 4.7 \times 10^{-5} \times 10^{-3} = 5.65 \times 10^{-11}(\text{A})$$

∴
$$I_{gM} = 56.5\text{pA}$$

②当 $V_G = -20V$ 时，形成强反型层，产生了场感应结；由于强反型后界面态对反向电流无甚影响，因此，此时反向电流由两部分组成：穿过冶金结的反向电流 $I_{gM}$；穿过场感应结的反向电流 $I_{gF}$。

即：
$$I_g = I_{gm} + I_{gF}$$

式中：
$$I_{gF} = qG_{FJ}x_{dm}A_s = q\frac{n_i}{2\tau}x_{dm}A_s$$
$$V_B = \frac{k_0T}{q}\ln\frac{N_D}{n_i} = 0.026\ln\frac{10^{16}}{1.5 \times 10^{10}}$$
$$= 0.35(\text{V})$$
$$x_{dm} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0(V_R + 2V_B)}{qN_D}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \times 11.6 \times 8.85 \times 10^{-14} \times (1 + 0.7)}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{16}}}$$
$$= 4.7 \times 10^{-5}(\text{cm})$$

∴
$$I_{gF} = q\frac{n_i}{2\tau}x_{dm}A_s = 1.6 \times 10^{-19} \times \frac{1.5 \times 10^{10}}{2 \times 10^{-6}} \times 4.7 \times 10^{-5} \times 10^{-3} = 5.65 \times 10^{-11}(\text{A}) = 56.5\text{pA}$$

∴ 反向电流：
$$I_g = I_{gm} + I_{gF} = 113\mu\text{A}$$

(3) ①对 $p^+$-n 结，正向偏置时扩散电流主要由 $p^+$-n 结的空穴流形成。

∴
$$I_D = I_p = qA_s \cdot \frac{D_pp_{n_0}}{L_p}(e^{\frac{qV_f}{k_0T}} - 1)$$
$$= qA_s \cdot \frac{L_p}{\tau_p}\left(\frac{n_i^2}{N_D}\right)(e^{\frac{qV_f}{k_0T}} - 1)$$

取 Si 的扩散系数：$D_p = 13\text{cm}^2/\text{s}$

则
$$L_p = \sqrt{D_p\tau_p} = \sqrt{13 \times 10^{-6}} = 3.6 \times 10^{-3}(\text{cm})$$

代入数据，得：

∴
$$I_D = 10^{-13} \times 1.6 \times 10^{-19} \times \frac{3.6 \times 10^{-3}}{10^{-6}}$$

$$\times \frac{(1.5 \times 10)^2}{10^{16}} \times (e^{\frac{0.4}{0.026}} - 1)$$

$$= 12.96 \times 10^{-15} \times (e^{154} - 1)$$

$$= 6.22 \times 10^{-8}(A) = 6.22 \times 10^{-2}\mu A$$

正向偏压下，势垒区复合电流

$$I_{rm} = q \cdot A_{MJ} \frac{n_i}{2\tau} x_D e^{\frac{qV_F}{2k_0T}}$$

又
$$x_D = \left[\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0(V_D - V)}{qN_D}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2 \times 11.6 \times 8.85 \times 10^{-14} \times 0.4}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{16}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2.26 \times 10^{-5}(cm)$$

$$\therefore \quad I_{rm} = 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-3} \times \frac{1.5 \times 10^{10}}{2 \times 10^{-6}} \times 2.3 \times 10^{-5} \times e^{\frac{0.4}{2\times 0.026}}$$

$$= 5.7 \times 10^{-8}(A)$$

②对场感应结势垒区的复合电流，在加正向电压的情况下，开始发生强反型的表面势为：

$$V_s = 2V_B - V_F$$

这时耗尽层最大厚度为：

$$x_{dm} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0(2V_B - V_F)}{qN_D}}$$

代入数据得：

$$x_{dm} = \sqrt{\frac{2 \times 11.6 \times 8.85 \times 10^{-14} \times 2 \times 0.35 - 0.4}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{16}}}$$

$$= 2 \times 10^{-5}(cm)$$

$\therefore$ 势垒区的复合电流：$I_{rF} = \frac{1}{2} q n_i \frac{x_{dm}}{\tau} e^{\frac{qV_F}{k_0T}}$

代入数据得：

$$I_{rF} = \frac{1}{2} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.5 \times 10^{10} \times \frac{2 \times 10^{-5}}{10^{-6}}$$

$$\times 10^{-3} e^{\frac{0.4}{2\times 0.026}} = 5.28 \times 10^{-8}(A)$$

界面态对正向复合电流的贡献为：

$$I_{rs} = \frac{1}{2} q n_i S_0 A_s e^{\frac{qV_F}{2k_0T}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.5 \times 10^{16} \times 5 \times 10^{-3} \times e^{\frac{0.4}{2\times 0.026}}$$

$$= 1.32 \times 10^{-8}(A)$$

故(i)当 $V_G = 0$，无场感应结。

$\therefore$ 正向电流 $I_F = I_D + I_{rm} = 6.22 \times 10^{-8} + 5.7 \times 10^{-8}$

$$= 11.92 \times 10^{-8}(A)$$

(ii)当 $V_G=-20V$,冶金结和场感应结同时对正向电流有贡献。

$$\therefore \quad I_F = I_D + I_{rm} + I_{rf} = 11.92\times10^{-8} + 5.28\times10^{-8} = 17.2\times10^{-8}(A)$$

(iii)正向电流和栅压 $V_G$ 的函数关系,对冶金结:

$$x_d = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0(V_D+V_R)}{qN_D}}$$

对场感应结,耗尽层度宽为 $W$。

由
$$V_G - V_{FB} = -\frac{Q_s}{C_i} + V_s$$

$$V_s = -\frac{qN_DW^2}{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0} \qquad Q_s = qN_DW$$

$$\therefore \quad V_G - V_{FB} = -\frac{qN_DW}{C_i} - \frac{qN_DW^2}{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}$$

即:
$$\frac{qN_D}{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}W^2 + \frac{qN_D}{C_i}W + (V_G + V_{FB}) = 0$$

解此方程得:

$$W = \frac{-\frac{qN_D}{C_i} \pm \sqrt{\left(\frac{qN_D}{C_i}\right)^2 + \frac{2qN_D}{\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}(V_G - V_{FB})}}{\frac{qN_D}{\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}}$$

显然只能取“+”号

$$\therefore \quad W = \left[\left(\frac{\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}{C_i}\right)^2 + \frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}{qN_D}(V_G - V_{FB})\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}{C_i}$$

根据栅控二极管的情况,可分成三个阶段讨论:

a)$V_G$ 使表面载流子堆积,这时只有冶金结电流:

反向偏置时:

$$I_R = I_{gM} = \frac{1}{2}q\frac{n_i}{\tau}x_dA_{Mj}$$

$$= \frac{1}{2}q\frac{n_i}{\tau}\left[\frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0(V_D+V_R)}{qN_D}\right]^{\frac{1}{2}}A_{Mj}$$

正向偏置时:
$$I_F = (I_D + I_{gM})e^{\frac{qV_F}{2k_0T}}$$

显然,它们与栅压 $V_G$ 无关。

b)$V_G$ 使表面耗尽情况,这时同时与 $I_{gM}$,$I_{gF}$有关:

反向偏置时:
$$I_R = I_{gM} + I_{gF} + I_{gS}$$
$$= \frac{1}{2}q\frac{n_i}{\tau}x_dA_{Mj} + \frac{1}{2}q\frac{n_i}{\tau}\left\{\left[\frac{(\varepsilon_{rs}\varepsilon_0)^2}{C_i^2} + \frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}{qN_A}(V_G - V_{FB})\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{qN_A}{C_i}\right\}A_s$$
$$+ \frac{1}{2}qn_iS_0A_s$$

正向偏置时：　　$I_r = (I_D + I_R)e^{\frac{qV_f}{2k_0T}}$

c)$V_G$ 使表面反型时：

反向偏置：

$$I_R = I_{gM} + I_{gF} = \frac{1}{2}q\frac{n_i}{\tau}x_dA_M + \frac{1}{2}q\frac{n_i}{\tau}\left\{\left[\frac{(\varepsilon_{rs}\varepsilon_0)^2}{C_i^2} + \frac{2\varepsilon_{rs}\varepsilon_0}{qN_D}(V_G - V_{FB})\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{qN_A}{C_i}\right\}A_s$$

正向偏置：

$$I_r = (I_D - I_{gM} + I_{gF})e^{\frac{qV_A}{2k_0T}}$$

**例 7**　金属-$SiO_2$-Si(p 型)构成的 MOS 结构电容器，设空穴浓度 $N_A = 1.5\times10^{15}/cm^3$，$SiO_2$ 层厚度 $d_0 = 0.2\mu m$，其相对介电系数 $\varepsilon_{r_0} = 3.9$，硅的相对介电系数 $\varepsilon_{rs} = 12$，$\varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-14}F/cm$，室温下 $n_i = 1.5\times10^{10}/cm^3$。

(1)设为理想的 MOS 结构，求开启电压 $V_T$；

(2)设 $SiO_2$ 与硅界面处存在固定正电荷，测得 $V_T = 2.6V$ 求单位面积固定正电荷数(略去功函数差的影响)；

(3)如果上述这些正电荷均匀分布于 $SiO_2$ 中，则测得的 $V_T$ 为多少？(略去功函数差的影响)；

(4)若这些正电荷在 $SiO_2$ 中呈抛物线分布，则测得的开启电压 $V_T$ 为多少？(如图 8-13 所示)

〔解〕　当表面势 $V_s = 2V_B$ 时，金属板上所加的电压称为开启电压。

$$V_T = V_0 + V_s = -\frac{Q_s}{C_0} + 2V_B = -\frac{Q_s}{C_0} + 2\frac{k_0T}{q}\ln\frac{N_A}{n_i}$$

式中，$Q_s = -qN_Ax_{dm}$ 为表面耗尽电荷

$$x_{dm} = \sqrt{\frac{4\varepsilon_{rs}\varepsilon_0V_B}{qN_A}}$$

$\therefore$　$Q_s = -\sqrt{qN_A\cdot4\varepsilon_{rs}\varepsilon_0V_B}$

$$V_B = \frac{k_0T}{q}\ln\frac{N_A}{n_i} = 0.026\ln\frac{1.5\times10^{15}}{1.5\times10^{10}} = 0.36(V)$$

故　$Q_s = -\sqrt{1.6\times10^{-19}\times1.6\times10^{15}\times4\times12\times8.85\times10^{-14}\times0.36}$

$= -6.05\times10^{-8}(C)$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_{r_0}\varepsilon_0}{d_0} = \frac{3.9\times8.85\times10^{-14}}{0.2\times10^{-4}}$$

$= 1.72\times10^{-8}(F/cm^2)$

$$\therefore -\frac{Q_s}{C_0} = \frac{6.05\times10^{-8}}{1.72\times10^{-8}} = 3.5(V)$$

$2V_B = 2\times0.36 = 0.72V$

开启电压　　$V_T = -\frac{Q_s}{C_0} + 2V_B = 3.5 + 0.72$

$= 4.22(V)$

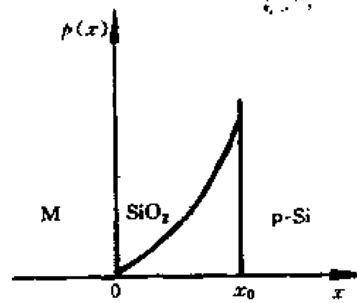



图 8-13

(2)因为 Si-SiO₂ 界面上存在正电荷有利于 p 型衬底反型，所以开启电压减少。即：

$$\Delta V_T = \frac{Q_{fc}}{C_0}$$

$$\therefore \quad Q_{fc} = C_0 \cdot \Delta V_T = 1.72 \times 10^{-8}(4.22 - 2.6)$$
$$= 2.79 \times 10^{-8}(\mathrm{C})$$

$$N_{fc} = \frac{Q_{fc}}{q} = \frac{2.79 \times 10^{-8}}{1.6 \times 10^{-19}} = 1.74 \times 10^{11}(\text{个}/\mathrm{cm}^2)$$

(3)因为正电荷均匀分布在 $SiO_2$ 层中，因此电荷密度 $\rho_0$ 为：

$$\rho_0 = \frac{Q_{fc}}{d_0} = \frac{2.79 \times 10^{-8}}{0.2 \times 10^{-4}} 1.4 \times 10^{-3}(\mathrm{C/cm^3})$$

略去功函数差的影响：

$$V_{FB} = -\frac{1}{C_0}\int_0^{d_0} \frac{x\rho_0 \mathrm{d}x}{d_0} = -\frac{\rho_0}{2C_0 d_0}d^2$$
$$= -\frac{\rho_0 d_0}{2C_0} = -\frac{1.4 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-5}}{2 \times 1.72 \times 10^{-8}}$$
$$= -\frac{2.8 \times 10^{-8}}{3.44 \times 10^{-8}} = -0.81(\mathrm{V})$$

由于这些均匀分布在 $SiO_2$ 层中正电荷的影响，可以使开启电压 $V_T$ 减少 0.81V。故此时测得

$$V_T = 4.22 - 0.81 = 3.41(\mathrm{V})$$

(4)由前面计算已知 $Q_{fc} = 2.79 \times 10^{8}(\mathrm{C})$

$$Q_{fc} = \int_0^{d_0} \rho(x)\mathrm{d}x = \int_0^{d_0} ax^2 \mathrm{d}x = \frac{a}{3}d_0^3$$

$\therefore \quad a = \dfrac{3Q_{fc}}{d_0^3}$ 　　　　故：$\rho(x) = \dfrac{3Q_{fc}}{d_0^3}x^2$

在这些正电荷的影响下，且略去功函数差，则平带电压变化量

$$V_{FB} = \frac{1}{C_0 d_0}\int_0^{d_0} x\rho(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{-1}{C_0 d_0}x \cdot \frac{3Q_{fc}}{d_0^3} \cdot x^2 \mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{4}\frac{Q_{fc}}{C_0 d_0^4}x^4\Big|_0^{d_0} = -\frac{3Q_{fc}}{4C_0}$$

$$= -\frac{3\times 2.79\times 10^{-8}}{4\times 1.72\times 10^{-8}} \approx -1.22(\text{V})$$

此时测得的开启电压

$$V_T = V_T + V_{FB} = 4.22 - 1.22 = 3.0(\text{V})$$

**例8** 若在禁带中心 $E_i$ 存在单能级的快界面态(即 $E_t = E_i$),其密度为 $N_{st}/\text{cm}^2$。设载流子填充快界面态遵从费米统计分布,试证明界面态电容 $C_{ss}(V_s)$ 为:

$$C_{ss} = \frac{q^2 N_{st}}{k_0 T}\,\frac{e^{\beta}}{(1+e^{\beta})^2}$$

式中

$$\beta = \frac{E_i - E_F - qV_s}{k_0 T}$$

〔证〕 在表面层由于电势的变化,使能带发生弯曲陷阱能级 $E_t$ 变为 $E_{ts}$(如图 8-14 所示)。由于($E_{cs} - E_{ts}$)的值是电子从表面态发射至导带所需要的能量,所以它与能带的弯曲无关,故 $E_{ts} = E_t - qV_s$。

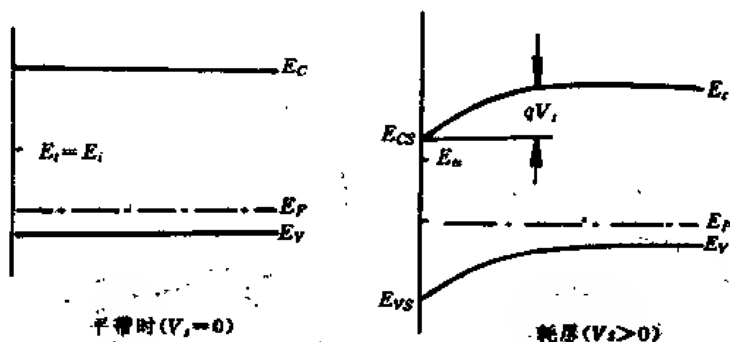



图 8-14

若忽略表面态中电子的简并化,且假定每个状态中电荷只有两个可能的值,且只相差一个电子,那末表面态被电子占据的几率 $f_t$ 由费米分布给出。

$$f_t = \frac{1}{1+\exp\left(\dfrac{E_{ts} - E_F}{k_0 T}\right)}$$

因为:$E_{ts} = E_t - qV_s$

$$\therefore \qquad f_t = \frac{1}{1+\exp\left(\dfrac{E_t - qV_s - E_F}{k_0 T}\right)} = \frac{1}{1+\exp\left(\dfrac{E_t - E_F - qV_s}{k_0 T}\right)}$$

对于受主型表面态其电荷量: $Q_{ss} = -qN_{st} f_t$

对于施主型表面态其电荷量: $Q_{ss} = +qN_{st}(1-f_t)$

显然,不管表面态的类型如何(施主或受主),都应有:

$$\frac{dQ_{ss}}{dV_s} = -qN_{st}\frac{df_t}{dv_s}$$

$$\frac{df_t}{dV_s} = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{1+\exp\dfrac{E_t - E_F - qV_s}{k_0 T}}\right)$$

$$= -q\frac{\exp\left(\frac{E_t - E_F - qV_s}{k_0T}\right)}{\left[1 + \exp\left(\frac{E_t - E_F - qV_s}{k_0T}\right)\right]^2}$$

表面态微分电容

$$C_{ss} = \frac{\mathrm{d}Q_{ss}}{\mathrm{d}V_s} = -qN_{st}\frac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}V_s}$$

$$= q^2N_{st}\frac{\exp\left(\frac{E_t - E_F - qV_s}{k_0T}\right)}{\left[1 + \exp\left(\frac{E_t - E_F - qV_s}{k_0T}\right)\right]^2}$$

令

$$\beta = \frac{E_t - E_F - qV_s}{k_0T}$$

则：

$$C_{ss} = q^2N_{st}\frac{\mathrm{e}^{\beta}}{(1 + \mathrm{e}^{\beta})^2}$$

即得证。

## 习　　题

8—1　有一铝-硅组成的 MOS 结构，实验测得其高频 $C$-$V$ 曲线如图 8-15 所示。此实验曲线与理想 $C$-$V$ 曲线比较，差别仅在于曲线沿电压轴平移－1.8V。问：

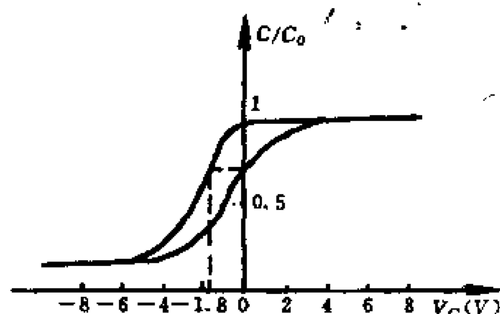



图 8-15

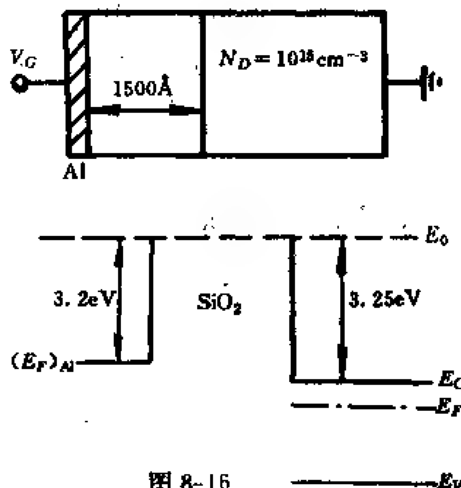



图 8-16

(4)$\varepsilon_r=12$,$\varepsilon_0=8.85\times10^{-14}$F/cm。

8—5　对于电阻率为 1Ω·cm 的无补偿 p 型硅,试问:

(1)其表面空间电荷量(即电荷密度)达到什么数值时,表面层出现反型层?

(2)在其表面热生长 $SiO_2$ 后,若要表面不出现反型层将有效界面态密度控制在什么范围内?

(3)若 $SiO_2$ 厚度控制为 2000Å,有效界面态密度刚好为第(2)问中的临界值。那么,在构成铝栅的 MOS 结构后,欲使半导体表面空间电荷量为零,栅极对硅衬底应加多大电压?

设:硅的 $E_g=1.12$eV,$n_i=1.5\times10^{10}/\text{cm}^3$,$\chi=4.05$eV,$\varepsilon_{rs}=12$,$(W_m)_{铝}=4.2$eV,$\varepsilon_{rSiO_2}=3.9$,$\ln10^6=14$,$\varepsilon_0=8.85\times10^{-14}$F/cm。

8—6　设有一铝栅 MOS 结构(n 型衬底),衬底的电阻率 $\rho=10\Omega\cdot\text{cm}$,已知 $SiO_2$ 厚度 $d_{0x}=2000$Å,$N_f=2\times10^{11}/\text{cm}^2$,求其平带电压 $V_{FB}$和阈值电压 $V_T$。

8—7　设有一层复合钝化膜,其厚度分别为 $d_1$、$d_2$,其中空间电荷密度分别为 $\rho_1(x)$、$\rho_2(x)$,其电容率分别为 $\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$,并设在二介质之间的界面上有效面密度为 $Q$ 的薄层电荷,求证此复合膜引起的 $V_{FB}$漂移量为:

$$\Delta V_{FB}=-\int_0^{d_1}\frac{x\rho_1(x)}{\varepsilon_1}\mathrm{d}x-\frac{1}{\varepsilon_2}\int_{d_1}^{d_1+d_2}\Big[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}d_1+(x-d_1)\Big]\rho_2(x)\mathrm{d}x-\frac{d_1}{\varepsilon_1}Q$$

8—8　求 MOS 结构(p 型衬底)$C$-$V$ 特性 $C_{min}/C_0$ 随温度变化的表示式。

8—9　设 p 型硅在反型状态,受稳定光照射时的表面电势 $V_s^*$ 与无光照时的表面电势 $V_s$ 有下列关系:

$$V_s-V_s^*=\ln\Big(1+\frac{\Delta n}{n_{p_0}}\Big)$$

式中,$\Delta n$ 为光生载流子的稳定浓度。

导出在光照情况下 $x_{dmax}^*$与耗尽状态表面空间电荷层的电容 $C_{S_{min}}^*$的表示式。

8—10　设 MOS 结构中空间电荷层密度为：

(1)$\rho(x)=\rho_0 e^{-\frac{x}{L}}$　　　　(2)$\rho(x)=\rho_0 \mathrm{sh}\frac{x}{d_{0x}}$

推导由此空间电荷引起的 $V_{FB}$ 的漂移量的表示式。

设：$d_{0x}=2000\text{Å}$，$L=2d_{0x}$，$L=\frac{1}{4}d_{0x}$；$\rho_0=10^{16}/\text{cm}^3$，分别求出对应于上面(1)、(2)两种情况时的 $V_{FB}$ 的数值。

8—11　掺受主浓度 $N_A=1.0\times10^{16}/\text{cm}^3$ 的 p 型硅 MOS 电容器，氧化层厚度 $d_{0x}=1000\text{Å}$，电极金属是铝，测得 C-V 曲线如图 8-17 所示。

求：在 Si-$SiO_2$ 界面上的正电荷密度。

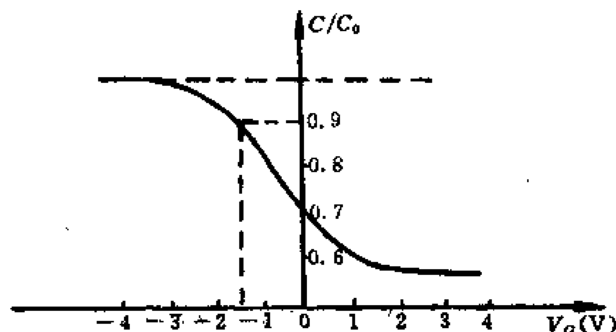



图 8-17

8—12　一理想的 MOS 电容器(p 型衬底)，其氧化层厚度 $d_0=0.1\mu\text{m}$，介电系数 $\varepsilon_{rs}=4$，衬底掺杂浓度 $N_A=10^{16}/\text{cm}^3$，试求下面几种情况下的电容：

(1)$V_G=+2\text{V}$，$f=1\text{Hz}$；(17.7nF/cm²)

(2)$V_G=+20\text{V}$，$f=1\text{Hz}$；(35.4nF/cm²)

(3)$V_G=+20\text{V}$，$f=1\text{MHz}$。(17.6nF/cm²)

8—13　一 MOS 结构其参数如下：$d_{0x}=1000\text{Å}$，$q\phi_m=4\text{eV}$，$q\phi_s=4.5\text{eV}$，氧化层中均匀分布的电荷为 $10^{16}/\text{cm}^3$，设 $\varepsilon_{r0}=4$，求该 MOS 结构的平带电压 $V_{FB}$？(−0.726eV)

8—14　分别求下面三种情况下的平带电压 $V_{FB}$？

(1)一 MOS 结构电容器其绝缘层中均匀存在的电荷密度为 $1.5\times10^{12}/\text{cm}^2$，设氧化层厚度为 1500Å，计算平带电压 $V_{FB}$；(−5.08V)

(2)若 $SiO_2$ 中的电荷全部分布在 $SiO_2$-Si 界面上，求 $V_{FB}$；(−10.16V)

(3)若电荷在氧化层中分布成三角形，在 $x=0$ 处为三角形顶点，$x=d_0$ 处为 0，求 $V_{FB}$。(−3.69V)

8—15　在 $N_A=10^{15}/\text{cm}^3$ 的 p 型 Si〔111〕衬底上制成一铝栅 MOS 晶体管，氧化层厚度为 1200Å，同铝接触，测得其表面电荷密度为 $3\times10^{11}/\text{cm}^2$，计算其阈值电压。

8—16　一 p 沟 MOS 晶体管(n 型衬底)其衬底浓度为 $10^{15}/\text{cm}^3$，氧化层厚度为 1000Å，计算阈值电压。设 $W_{ms}=-0.6\text{eV}$，$Q_{ss}=5\times10^{11}/\text{cm}^2$。

8—17　一 MOS 结构(n 型衬底)电容器，其衬底浓度为 $N_D=5\times10^{15}/\text{cm}^3$，氧化层厚度为 1000Å，同铝接触测得其阈值电压为−2.5V，计算其表面电荷密度。($1.4\times10^{11}/\text{cm}^2$)

8—18 一MOS电容器(n型衬底)其衬底浓度$N_D=10^{15}/cm^3$，氧化层厚度根据需要做成，但其厚度不能小于$10^{-5}cm$，否则会容易形成针孔。

(1)若MOS结构的面积为$10^{-3}cm^2$，且要求MOS电容器的最大电容$C_{max}=30pF$，则需要氧化层厚度为多少？

(2)对应此厚度的最小电容$C_{min}$又是多少？

(3)假设快界面态密度为$10^{11}/cm^2$，在最大电容$C_{max}$和最小电容$C_{min}$之间的偏压差为多少？

8—19 有n型Ge半导体晶片，其电阻率为0.1Ω·cm，电子迁移率为$3000cm^2/V\cdot s$，其上生长一层$SiO_2$，厚度为0.5μm，最上层的金属电极是铝，这样制成MOS结构的电容器。已知：从Al中取走一个电子的能量为3.38eV，从Ge的价带中取走一个电子所需的能量为4.5eV，从$SiO_2$中移走一个电子所需要的能量为11eV，设Ge的禁带宽度为0.66eV，$SiO_2$的禁带宽度为9eV，忽略表面态的影响，画出该MOS结构平衡时的能带图。

8—20 室温下，硅表面态按能量均匀分布在禁带的上半部，设总共有$10^{12}$施主态/$cm^2$。

(1)若半导体掺有$10^{15}/cm^3$的浅施主，说明表面附近的能带弯曲？

(2)若半导体掺有$10^{15}/cm^3$的浅受主，说明表面附近的能带弯曲？

(3)若要保持表面为本征情况，则半导体应为何种类型？其掺杂浓度为多少？

8—21 考虑界面态的电容效应后界面态(陷阱)电容$C_{it}$和半导体表面电容是串联还是并联？此时MOS电容$C_{it}$表示式如何？试设计利用高频$C$-$V$曲线测量界面陷阱电荷密度的实验，并推导其理论计算公式。

8—22 有p型硅单晶片，电阻率$\rho=1.5\Omega\cdot cm$，其氧化层厚度为$d_{ox}=3450$Å，金属电极为铝，其面积经测量显微镜测量为$A_0=8.0\times10^{-3}cm^2$。由$C$-$V$特性曲线表明，经正、负温度-偏压处理后和原始$C$-$V$曲线的最大电容值均为80pF，归一化最小电容均为$C_{min}/C_0=0.77$。$C$-$V$曲线上和归一化电容$C/C_0=0.965$对应的电压坐标各为：

(1)原始曲线为$-7V$。

(2)$+B$-$T$后曲线为$-17.3V$。

(3)$-B$-$T$后曲线为$-4.2V$，求其固定电荷和可动离子密度。

$$(N_f=2.03\times10^{11}/cm^2,N_m=8.2\times10^{11}/cm^2)$$

8—23 有一个铝栅$SiO_2$介质膜结构的MOS电容器，衬底为p型(111)硅单晶，$N_A=10^{15}/cm^3$，已知：$d_{0x}=1000$Å，$Q_{0x}=4\times10^{11}C/cm^3$时，阈值电压$V_T=-1.69V$，试求当$d_{0x}=2000$Å，$Q_{0x}=2\times10^{10}C/cm^3$时，$V_T$为多少伏？

8—24 在强堆积情况下，当加在金属栅极上的电压由表面势和德拜长度之内的载流子电荷所屏蔽时，栅电压可表示为：

$$V=V_s+\frac{n_s qL_s}{C_0}$$

式中，$L_s$为德拜长度；$C_0$为氧化层电容；$n_s$为表面处电子浓度。试证明：室温下当$V_s\ll\frac{k_0T}{q}$时，平带电压在$C/C_0=0.95$点所对应的电压为$\pm1V$。正号对应于p型，负号对应于n型。

提示：$L_s=\left(\frac{2k_0T\varepsilon_s}{q^2n_s}\right)^{\frac{1}{2}}$

# 第九章　异　质　结

## 内 容 提 要

(1)由两种不同性质的半导体形成的结称为异质结。异质结是同质结的引伸和发展，而同质结则是异质结的特殊情况。异质结分为同型异质结(如 n-nGe-Ga As,n-nGe-Si,p-pSi-GaP 等)和反型异质结(如 p-nGe-GaAs,p-nGe-Si 等)。通常形成异质结的两种材料沿界面有相近的结构，因而在界面仍保持晶格的连续性。

(2)异质结能带图取决于两种材料的电子亲合能、禁带宽度、导电类型、掺杂浓度以及界面态等多种因素。然而平衡异质结内具有统一的费米能级仍然是画能带图的重要依据。在导带底和价带顶出现的台阶 $\Delta E_c$ 和 $\Delta E_v$，反映了自由电荷从一种材料进入另一种材料所必须给予的能量。这种能带的不连续性是研究异质结能带模型的物理基础。

(3)异质结两侧半导体材料的晶格常数不同，引起晶格失配。晶格失配定义为：晶格常数之差/平均晶格常数，即 $2|a_2-a_1|/(a_2+a_1)$。由于晶格失配，在界面附近势必有一部分悬挂键，出现密度相当高的界面态。大量界面态的存在不仅会引起过界面态的复和和产生电流，而且还影响异质结的能带图。其影响和金属-半导体接触中的情形相似。

(4)因为异质结能带的不连续，高密度的界面态和缺陷，使异质结的电流输运问题比同质结复杂得多。不存在一种在多数情况下占主导地位的电流机制。目前解释异质结电流输运机构的模型有：扩散模型，发射模型，发射-复合模型，隧道-复合模型。

(5)半导体超晶格是由周期性交替生长的具有相同类型能带结构的两种不同半导体构成的。整个结构保持晶格的连续性，每种材料的厚度通常为晶格常数的 2～20 倍。超晶格能带具有高度的非抛物性，因此超晶格中的电子输运不同于普通晶体的电子输运。由半导体超晶格获得的特殊性质已引起人们的极大关注。

## 问　题

9—1　何谓异质结？异质结如何分类？试以 Ge 和 Ga As 为例，说明异质结的表示法。

9—2　何谓突变异质结和缓变异质结？它们与同质的突变 P-N 结和缓变 P-N 结有何区别？

9—3　图 9-1 是突变 n-p 异质结的平衡能带图。图 9-1($a$)为形成异质结前，图 9-1($b$)为形成异质结后的能带；讨论：(1)内建电场的建立和能带弯曲的大小与原来费米能级的关系；(2)异质结能带在交界面的特点。

9—4　以晶格常数为 $a$ 的金刚石结构为例，计算(111)，(110)，(100)的悬挂键密度，并比较其大小。

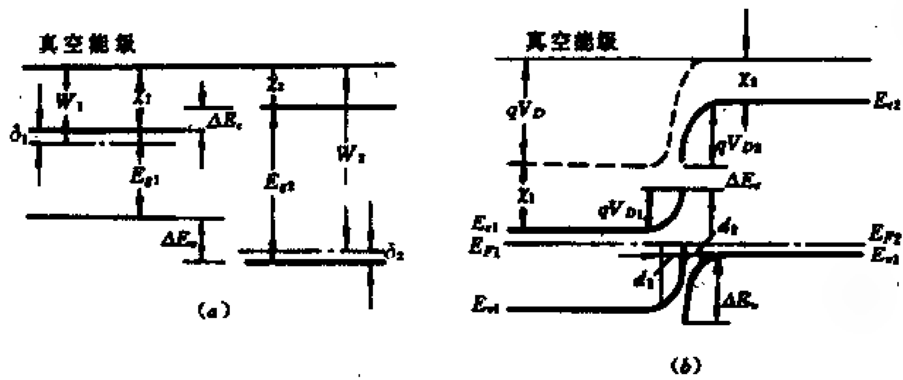



图 9-1

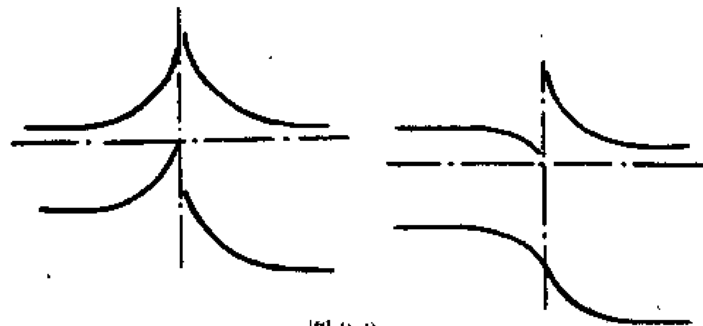


图 9-2

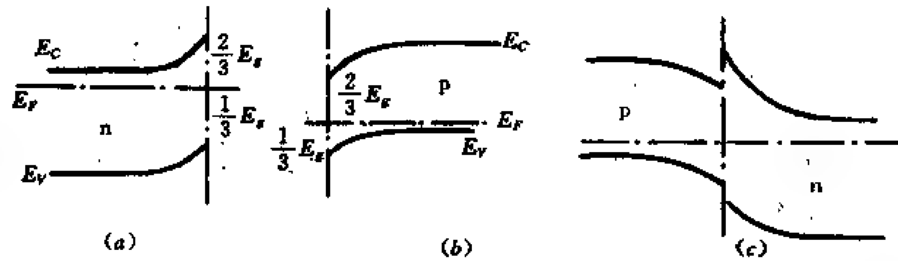



图 9-3

9—5　如何区分界面的原子面密度和悬挂键面密度，是否原子面密度大的悬挂键面密度一定大？

9—5　图 9-2 的两个异质结能带都是 n 型材料构成的。它们是否正确？如何解释。

9—6　在考虑到界面态密度相当高的条件下，如何画异质结的能带？当表面态密度比较大时（$>10^{13}/cm^2$），N 型半导体表面处能带弯曲如图 9—3(a)，p 型半导体表面处能带弯曲如图 9-3(b)，所以，异质结的能带图 9-3(c)。是否正确，为什么？

9—7　比较异质结与同质结的不同。根据异质结的独特性质，说明异质结的应用。

9—8　为什么异质结的电流输运机构比同质结复杂得多？

## 习　题

9—1　设异质 p-n 结的 p 区和 n 区的杂质浓度分别为 $N_{A1}$ 和 $N_{D2}$，且均匀分布，介电常数分别为 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$。设交界面在 $x=x_0$，势垒正负空间电荷区的宽度分别为 $d_1=(x_0-x_1)$，$d_2=$

$(x_2-x_0)$，如图 9-4 所示。试从泊松方程出发，推导突变异质 pn 结的接触电势差 $V_D$ 为：

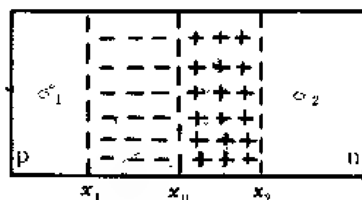



图 9-4

$$V_D=\frac{qN_{A1}(x_0-x_1)^2}{2\varepsilon_1}+\frac{qN_{D2}(x_2-x_0)^2}{2\varepsilon_2}$$

并证明其势垒宽度 $X_D$ 为：

$$X_D=\left[\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2(N_{A1}+N_{D2})^2V_D}{qN_{A1}N_{D2}(\varepsilon_1N_{A1}+\varepsilon N_{A2})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

9—2　当如图 9-5 所示的 p 型和 n 型材料接触形成 p-n 结时，试画出热平衡时的能带图。

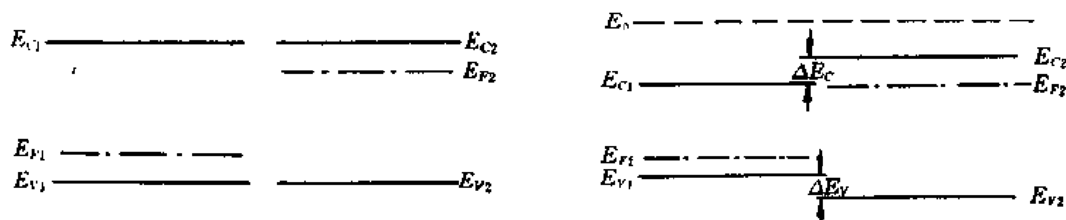



图 9-5

9—3　GaAs 和 GaP 的晶格常数分别为 5.6531Å 和 5.4505Å，试计算这两种材料的晶格失配因子。

9—4　试用连续方程和扩散模型推导突变反型异质结负反向势垒的电流-电压关系。

$$J=qn_2\left(\frac{D_n}{\tau_n}\right)^{\frac{1}{2}}\left[e^{-\frac{(qV_D-\Delta E_c)}{k_0T}}\right]\left[e^{\frac{qV}{k_0T}}-1\right]$$

9—5　用分子束外延技术制成的一种多层晶体，是由一层 GaAlAs 交迭而成，每层晶体只有 50 多个原子层厚度。以硅作施主杂质，掺入 GaAlAs 中央部位。由于 GaAlAs 的禁带宽度比 GaAs 的大，结果室温下 GaAs 中的载流子迁移率提高了一倍(与具有同样电子浓度的 n-GaAs 比较)试问：

(1)GaAs 半导体的导电类型如何？

(2)试解释 GaAs 中载流子迁移率提高的原因。

9—6　$A$、$B$ 两种半导体材料形成理想异质结，$A$ 为 P-Ge，$B$ 为 n-GaAs，它们的基本常数为：

$E_{gA}=0.67\text{eV}$，　$E_{gB}=1.43\text{eV}$，　$\chi_A=4.13\text{eV}$

$\chi_B=4.06\text{eV}$，　$\delta_A=(E_C-E_F)_A=0.53\text{eV}$，　$\delta_B=(E_C-E_F)_B=0.1\text{eV}$

求：(1)此异质结结构界面处的导带不连续量 $\Delta E_c$ 及价带的不连续量 $\Delta E_v$ 分别为多少？

(2)画出异质结的能带简图(画出带边变化趋势，标明 $\Delta E_c$ 及 $\Delta E_v$，并标明 $E_F$)

# 第十章　半导体的光学性质和光电与发光现象

## 内 容 提 要

（1）光照半导体时，具有能量为 $h\nu$ 的光子会被半导体吸收。最主要的吸收为本征吸收，要求光子能量 $h\nu > E_g$。对应本征吸收过程的跃迁分为直接跃迁和间接跃迁。

其他的吸收过程有：激子吸收，杂质吸收，自由载流子吸收和晶格振动吸收。

（2）光照能在半导体中产生非平衡载流子 $\Delta n(\Delta p)$，使半导体中载流子数目增多，引起附加的光电导 $\Delta\sigma = \Delta nq\mu_n + \Delta pq\mu_p$；实验证明，一般只是光生多数载流子对电导率有贡献，故 $\Delta\sigma = \Delta nq\mu_n$（或 $\Delta pq\mu_p$）。

本征光电导是最主要的光电导现象，杂质光电导相比之下甚微。杂质吸收和杂质光电导是研究杂质能级的一种重要方法。

光电导现象因载流子复合规律不同，有直线性光电导（$\Delta\sigma \propto I$）和抛物型光电导（$\Delta\sigma \propto \sqrt{I}$）之分。

（3）光电导弛豫现象就是光生附加载流子 $\Delta n$（或 $\Delta p$ 随时间变化的现象。在小注入条件下，$\Delta n$ 按指数规律上升或下降。

上升过程，$\Delta n = \tau(I\alpha\beta)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

下降过程：$\Delta n = \tau(I\alpha\beta)e^{-\frac{t}{\tau}}$

在强注入时，上升过程：

$$\Delta n = \left(\frac{I\alpha\beta}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{tgh}[(\beta\alpha I r)^{\frac{1}{2}} t] \quad (r\text{ 为复合系数})$$

下降过程：

$$\Delta n = \frac{1}{\left(\frac{r}{\beta\alpha I}\right)^{\frac{1}{2}} + rt} = \left(\frac{\beta\alpha I}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{1+(\beta\alpha I r)^{\frac{1}{2}} t}\right]$$

（4）当用适当波长的光照射非均匀半导体（如 p-n 结，肖特基结等）时，由于内建电场的作用，半导体内部产生电动势（光生电压），如将 p-n 结短路，则会出现电流（光生电流），这种由内建场引起的光电效应，称为光生伏特效应（内光电效应）太阳能光电池就是利用这一效应做成的一种光电器件。

光电池的电流-电压特性方程：

$$V = \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_L - I}{I_S} + 1\right)$$

（5）半导体内部处于非平衡状态时，非平衡载流子复合，以辐射形式释放能量，这就是半导体发光现象。发光实质上是光吸收的逆过程。

发光现象可分为：电（场）致发光，光致发光和阴极发光。

辐射跃迁过程可分为：有杂质或缺陷参与的跃迁，带-带之间的跃迁以及热载流子在带内跃迁。其中以施主和受主之间的跃迁发光效率较高。多数发光二极管属于这种跃迁机理。

发光效率有内量子效率和外量子效率之别。

(6)$p^+$-n 结正向注入时，电子和空穴在势垒区复合而产生光辐射。理论推导得到：当满足 $E_g \leqslant h\nu < E_F^n - E_F^p$ 就会引起导带向价带跃迁产生受激辐射。当满足一定条件时，才能发射激光。产生激光的条件为：

①形成分布反转，使受激辐射占优势；

②具有共振腔，以实现光量子放大；

③注入电流至少达到阈值电流密度，使增益至少等于损耗。

## 问　题

10—1　什么是光电导？说明复合效应和陷井效应对光电导的影响？

10—2　区别直接跃迁和间接跃迁(竖直跃迁和非竖直跃迁)。

10—3　简述本征半导体的光吸收与能带结构的关系，并用 Ge 和 GaAs 的实验结果予以说明(见图 10-1)。

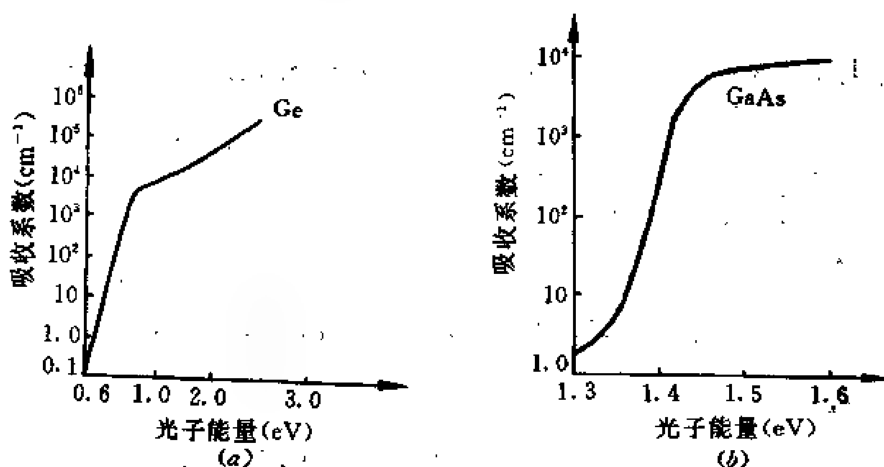



图 10-1

10—4　什么是声子？它对半导体的光吸收特性起什么作用？

10—5　使半导体材料 Si、Ge 和 GeAs 在光照下能够产生电子-空穴对的光最大波长为多少？

10—6　半导体对光的吸收有哪几种主要过程？哪些过程具有确定的长波吸收限？写出对应的波长表达式。哪些具有线状吸收光谱？哪些光吸收对光电导有贡献？

10—7　本征吸收中电子吸收光子时，可能出现哪几种跃迁方式？它们有何不同？各在什么样的半导体中容易发生？试举一、二例说明。

10—8　什么是半导体的自由载流子光吸收？分别用经典理论和量子理论说明，并简要讨论其结果。

10—9　(1)写出 p-n 结光电二极管的伏安特性方程并画出对应的特性典线；

(2)p-n 结光电二极管的电流相应于正偏置还是反偏置的二极管电流；

(3)对于不同能量的光照,其曲线如何变化?

10—10 解释光生伏特效应,写出光电池的伏安特性方程,说明光电池工作在哪个范围。

10—11 比较光电二极管、光电池、光敏电阻和发光二极管的工作原理,根据讨论结果,说明其电流-电压特性曲线的变化范围。

10—12 什么是半导体发光?一般分为几种形式?

10—13 区别自发辐射和受激辐射?说明粒子分布反转的物理意义?

10—14 如以 $E_F^n$、$E_F^p$ 分别表示半导体非平衡电子及空穴的准费米能级,试说明,在半导体导带与价带之间实现粒子数分布反转的条件为:$E_F^n-E_F^p>E_g$,举例说明实现粒子分布反转的方法。

10—15 半导体 p-n 结激光器要产生激光必须满足哪几个条件?各用什么方法实现?

10—16 画出图 10-2 条件下光电流在外电路的流动方向(设光照可以穿透整个 p-n 结)。

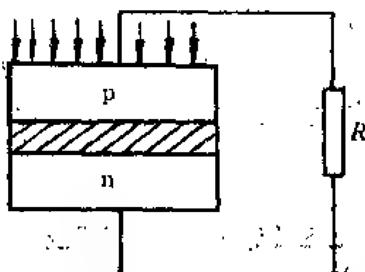



图 10-2

10—17 要产生激光发射,为什么需要对半导体重掺杂?

10—18 为什么异质结比同质 p-n 结注入效率高?试画出能带图予以说明。

10—19 (1)图 10-3 为两种不同禁带宽度的半导体材料,试画出异质 n-p 结能带图。

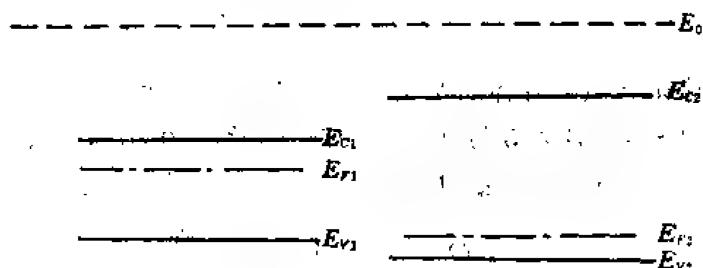



图 10-3

(2)当太阳照在由上述材料组成的二种结构光电池时(如图 10-4),试问,哪种结构的阳光电池的太阳能利用率较高?为什么?

$t_n=\frac{1}{\alpha_1}$ $\alpha_1$ 是 $Eg_1$ 为 1.0eV 的半导体材料的本征吸收系数;

$t_p=\frac{1}{\alpha_2}$ $\alpha_2$ 是 $Eg_2$ 为 1.5eV 的半导体材料的本征吸收系数。

10—20 如图 10-5 所示,用低于 $h\nu_0=Eg$ 的某一频率 $\nu_1$ 的光照射半导体样品时,发现有明显光吸收,但同时发现有光照和无光照时的电压表的指针不动(表示数值基本不变)。

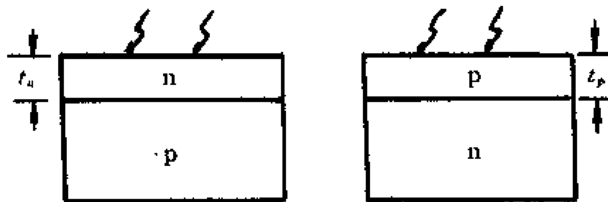



图 10-4

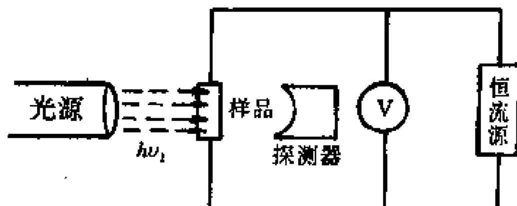



图 10-5

试说明此现象的物理本质。

10—21 有人说："Ge 和 Si 是间接带隙半导体，所以它们的本征光吸收只有电子的间接跃迁，没有电子的直接跃迁。"你认为此说法如何？为什么？

10—22 如图 10-6 所示的两种异质结发光二极管，试问哪一种封装形式更合理一些？为什么？

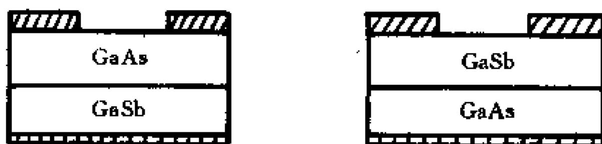



图 10-6

## 解题示例

例 1 一重掺杂 n 型半导体的平衡载流子浓度为 $n_0$ 和 $p_0$，恒定光照下，产生的电子-空穴对数为 $Q/\text{cm}^3\cdot\text{s}$，复合系数为 $\gamma$。今另加一闪光，产生附加光载流子的浓度为 $\Delta n=\Delta p$ ($\ll n_0$)。试证：闪光 $t$ 秒后，样品内空穴浓度为：

$$p(t)=p_0+\Delta p e^{-rn_0t}+\frac{Q}{rn_0}$$

〔证明〕 复合率$=rnp=r(n_0+\Delta n)(p_0+\Delta p)$

$$=rn_0p_0+r(n_0+p_0)\Delta p+r(\Delta p)^2$$

$\because$ $\Delta n=\Delta p$

又$\because$该材料为重掺材料

$\therefore n_0\gg p_0$，故上式可简化为：

复合率$=rnp\approx rn_0\Delta p+rn_0P_0$

平衡时：产生率 $G=rn_0p_0$ （即平衡时：产生率＝复合率）

$\therefore$净复合率＝复合率－产生率$=rn_0\Delta p+rn_0p_0-rn_0p_0$

即净复合率$=rn_0\Delta p$

当光照达到稳定后，产生率＝复合率

∴ $$Q=rn_0\Delta p$$

即： $$\Delta p=\frac{Q}{rn_0}$$

设 $t=0$ 时刻，加一闪光

∴ $$\Delta p(t)|_{t=0}=\Delta p(0)=\Delta p+\frac{Q}{rn_0}$$

（注：式中 $\Delta p$ 为脉冲光照产生的空穴）

已知：$\Delta p(t)$满足的方程为：

$$\frac{d\Delta p(t)}{dt}=Q-rn_0\Delta p(t)$$

解此方程：

$$-\frac{1}{rn_0}\frac{d[Q-rn_0\Delta p(t)]}{Q-rn_0\Delta p(t)}=dt$$

两端积分得： $$\ln[Q-rn_0\Delta p(t)]=-rn_0t+C'$$

∴ $$Q-rn_0\Delta p(t)=Ce^{-rn_0t}$$

即： $$\Delta p(t)=\frac{Q}{rn_0}-\frac{C}{rn_0}e^{-rn_0t}$$

∵ $t=0$ $\Delta p(0)=\frac{Q}{rn_0}+\Delta p$

∴ $$\frac{Q}{rn_0}+\Delta p=\frac{Q}{rn_0}-\frac{C}{rn_0}$$

故 $$C=-rn_0\Delta p$$

代回原式即得：

$$\Delta p(t)=\frac{Q}{rn_0}+\Delta pe^{-rn_0t}$$

$$\Delta p(t)=p(t)-p_0$$

∴ $$p(t)=p_0+\frac{Q}{rn_0}+\Delta pe^{-rn_0t}$$

**例 2** 有 n 型 CdS 正方形晶片，边长为 1mm，厚为 0.1mm，其波长吸收限为 5100Å。今用光强度为 $1\text{mW/cm}^2$ 的紫色光（$\lambda=4096$Å）照射正方形表面，量子产额为 $\beta=1$。设光生空穴全部被陷，光生电子寿命为 $\tau_n=10^{-5}$s，电子迁移率为 $\mu_n=100\text{cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$；并设光照能量全部被晶片吸收，求下列各值。

(1)样品中每秒产生的电子-空穴对数；

(2)样品中增加的电子数；

(3)样品的电导增量 $\Delta g$；

(4)当样品上加以 50V 电压时的光生电流，光电导增益因子。

〔解〕 (1)∵光照能量全部被吸收；

∴在正方形样品表面上的入射光全部产生光电子。

又知：$\beta=1$

故：每秒中产生的电子-空穴对数 $Q=I$（以光子数目计），若用光子数表示光强（即单位面积上的光子数）。每一个光子的能量：

$$E_0 = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

代入数据：$E_0 = 6.62\times10^{-27}\times3\times10^{10}\times\frac{1}{4096\times10^{-8}}$

$= 4.85\times10^{-12}(\mathrm{erg})$

∴ $E_0 = 4.85\times10^{-19}(\mathrm{J})$

则 $I = \frac{1\times10^{-3}}{4.85\times10^{-19}} = 2.07\times10^{15}(1/(\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{s}))$

已知样品面积 $S=(10^{-1})^2=10^{-2}\mathrm{cm}^2$

∴样品中每秒产生的电子-空穴对数： $Q=S\cdot I$

即： $Q=2.07\times10^{15}\times10^{-2}=2.07\times10^{13}$

(2)样品中增加的电子数：

$$\Delta n' = Q\tau_n = 2.07\times10^{13}\times10^{-3} = 2.07\times10^{10}(个)$$

而单位体积中增加的电子数：

$$\Delta n = \frac{\Delta n'}{V} = \frac{2.07\times10^{10}}{10^{-4}} = 2.07\times10^{14}(1/(\mathrm{cm}^3\cdot\mathrm{s}))$$

(3)附加的电导率： $\Delta\sigma = \Delta n q \mu_n$

注意：$\Delta n$ 为单位体积中的电子数的增量。

∴ $\Delta\sigma = 2.07\times10^{14}\times1.6\times10^{-19}\times100$

$= 3.3\times10^{-3}(\mathrm{S/cm})$

电导增量 $\Delta g = \Delta\sigma\cdot\frac{A}{l} = 3.3\times10^{-3}\times\frac{10^{-3}}{10^{-1}}$

$= 3.3\times10^{-5}(\mathrm{S})$

(注：电导可能沿两个方向计算，由于题目未说明，故按图 10-7 所示计算)

∵$J=\sigma\cdot E$，∴光生载流子引起的 $J=\Delta\sigma\cdot E=\Delta\sigma\cdot\frac{V}{l}$

又电流：$I=J\cdot A$

$=\Delta\sigma\cdot\frac{A}{l}\cdot V$

$=\Delta g\cdot V$

故：光生电流$I=\Delta g\cdot V$

$=50\times3.3\times10^{-5}$

$=1.65\times10^{-3}(\mathrm{A})$

即： $I=1.65\mathrm{mA}$

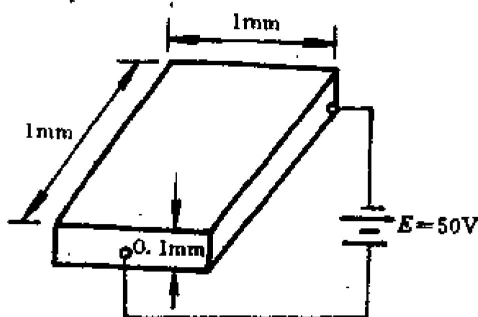



图 10-7

(4)光电导增益因子：

$$G = \frac{\tau_n}{\tau_t} = \frac{\tau_n\mu_n V}{l^2} = \frac{10^{-3}\times100\times50}{10^{-2}} = 500$$

**例 3** 上题中无光照时电导 $g_0=10^{-4}\mathrm{S}$；如要样品的电导增加一倍，即 $\Delta g=g_0$，所需光照强度为多少？

〔解〕 ∵光照媒质后，其衰减规律为：

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

式中，$\alpha$ 为衰减系数。

当 $x=\frac{1}{\alpha}$ 时，$I=\frac{I_0}{e}$，即光照能量全部被晶片吸收。

$$\therefore \qquad \alpha=\frac{1}{d}$$

∵光照强度随透射的距离不同而异。

∴在不同平面上光生载流子数不同，因而各薄层电导不同。（这里考虑如图 10-8 示 $x$ 方向电导）

故
$$\Delta g=\int_{S_0}^{S}\Delta g'\cdot\frac{ds}{l}$$

$$=\int_0^{0.01}\Delta g'\frac{l\mathrm{d}x}{l}$$

$$=\int_0^{0.01}\tau_n I\alpha\beta\mu_n\mathrm{d}x$$

将 $I=I_0e^{-\alpha x}$ 代入上式，且认为在 $x=0.01$ 处光强为零，即光全部被吸收。

$$\therefore \qquad \Delta g=\tau_n I_0\alpha\beta q\int_0^{0.01}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\tau_n I_0\beta q\mu_n$$

$$I_0=\frac{\Delta g}{\tau_n\beta\mu_n q}$$

令
$$\Delta g=g_0$$

则：
$$I_0=\frac{g_0}{\tau_n\beta q\mu_n}$$

代入数据：

$$I_0=\frac{10^{-3}}{10^{-3}\times1.6\times10^{-19}\times10^2}$$

$$=\frac{1}{1.6}\times10^{12}(1/(\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{s}))$$

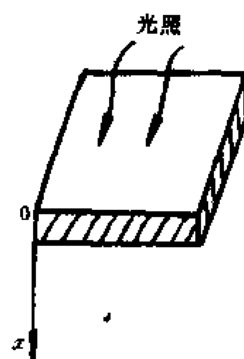


图 10-8

若以能量计算，则每个光子能量 $E_0=4.85\times10^{-19}(\mathrm{J})$

$$\therefore \qquad I_0=\frac{1}{1.6}\times10^{12}\times4.85\times10^{-19}$$

$$=3\times10^{-7}(\mathrm{W/cm^2})$$

即
$$I_0=3\times10^{-4}(\mathrm{mW/cm^2})$$

**例 4** 计算衬底掺杂在 $10^{15}/\mathrm{cm}^3$ 和 $10^{16}/\mathrm{cm}^3$ 之间硅 $n^+$-p 结光电池的开路电压。假设 $L_n=100\mu\mathrm{m}$，$D_n=36\mathrm{cm}^2/\mathrm{S}$，光电流密度 $I_l/A=35\mathrm{mA/cm}^2$，这些参数与掺杂浓度无关。

〔解〕 因为在 $n^+$-p 结中，$N_D\gg N_A$，p-n 结饱和电流的表示式可简化为：

$$I_s=qAn_i^2\left(\frac{D_p}{L_pN_D}+\frac{D_n}{L_nN_A}\right)\approx\frac{qAn_i^2D_n}{L_nN_A}$$

$$=\frac{1.6\times10^{-19}\times A\times(1.5\times10^{10})^2\times36}{100\times10^{-4}\times N_A}$$

$$=\frac{1.3\times10^5A}{N_A}(\mathrm{A/cm^2})$$

因此，开路电压 $V_{oc}$ 的表示为：

$$V_{oc}=\frac{k_0T}{q}\ln\left(1+\frac{I_L}{I_s}\right)$$

$$= 0.026\ln\left(1 + \frac{35 \times 10^{-3} A N_A}{1.3 \times 10^5 A}\right)$$

| 故：$N_A(1/cm^3)$ | $10^{15}$ | $10^{16}$ | $10^{17}$ | $10^{18}$ |
|---|---|---|---|---|
| $V_{oc}(V)$ | 0.5 | 0.57 | 0.63 | 0.68 |

**例 5** 设一入射光子通量为 $F_{ph}$ 的单色光照射在"$p^+$ 在 n 上"的 $p^+$-n 光电池的表面，表面反射和表面复合不予考虑。设吸收系数为 $\alpha$，背面接触处的表面复合速度为 $S$，设在 $p^+$ 层内的吸收忽略不计。推导 n 侧内光产生少数载流子密度和电流的表示式(图 10-9)。

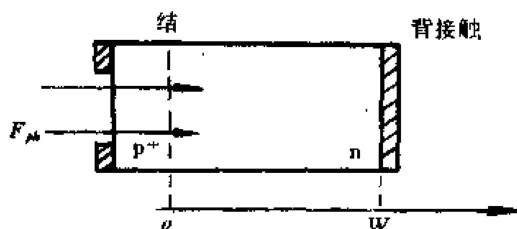



图 10-9

〔解〕 光在 n 区的吸收系数为 $\alpha$，所以电子-空穴对的产生率是透入深度的函数即：

$$g_L = \alpha F_{ph} e^{-\alpha x}$$

n 侧少数载流子的稳态连续性方程为：

$$\left(D_p \frac{d^2 P_n}{dx^2}\right) - \frac{P_n - P_{n0}}{\tau_p} + \alpha F_{ph} e^{-\alpha x} = 0 \tag{1}$$

其边界条件：在 $x=0$　　$P_n - P_{n0} = 0$

在 $x=w$　　$S(P_n - P_{n0}) = -D_p \dfrac{dP_n}{dx}$

$$P_n - P_{n0} = A e^{\frac{x}{L_p}} + B e^{-\frac{x}{L_p}} - \frac{\alpha F_{ph} \tau_p}{\alpha^2 L_p^2 - 1} e^{-\alpha x} \tag{2}$$

代入边界条件：

$$A + B - \frac{\alpha F_{ph} \tau_p}{\alpha^2 L_p^2 - 1} = 0$$

$$-\frac{D_p}{L_p} A e^{\frac{W}{L_p}} + \frac{D_p}{L_p} B e^{-\frac{W}{L_p}} + \frac{\alpha^2 F_{ph} \tau_p D_p}{\alpha^2 L_p^2 - 1} e^{-\alpha W}$$

$$= S(P_n - P_{n0})$$

解出 $A$，$B$ 后代入(2)式

$$P_n - P_{n0} = \frac{\alpha F_{ph} \tau_p}{\alpha^2 L_p^2 - 1}\Bigg[\mathrm{ch}\frac{x}{L_p} - e^{-x}$$

$$- \frac{S\left(\mathrm{ch}\frac{W}{L_p}\right) + \frac{D_p}{L_p}\left(\mathrm{sh}\frac{W}{L_p}\right) + (\alpha D_p - s) e^{-\alpha W}}{S \cdot \left(\mathrm{sh}\frac{W}{L_p}\right) + \frac{D_p}{L_p}\mathrm{ch}\frac{W}{L_p}} \cdot \mathrm{sh}\frac{x}{L_p}\Bigg]$$

从 n 区流到 $p^+$ 区的空穴电流为：$J_p = -qD_p \left.\dfrac{dP_n}{dx}\right|_{x=0}$

$$J_p = \frac{qF_{ph}\alpha L_p}{\alpha^2 L_p^2 - 1} \times \left[\frac{S\left(\mathrm{ch}\frac{W}{L_p}\right) + \frac{D_p}{L_p}\left(\mathrm{sh}\frac{W}{L_p}\right) + (\alpha D_p - S) e^{-\alpha W}}{S\left(\mathrm{sh}\frac{W}{L_p}\right) + \frac{D_p}{L_p}\mathrm{ch}\frac{W}{L_p}} - \alpha L_p\right]$$

**例 6** 现有一块掺杂浓度 $N_D=10^{16}/cm^2$ 的 n-Ge 的样品，其厚度 $d \gg L_p$，在样品上表面用波长 $\lambda=0.75\mu m$，其强度 $P=4.4\times10^{-3}W/cm^2$ 的红光垂直照射，除反射之外，其余全部在表面薄层 $\Delta d=0.1\mu m$ 的厚度之内被均匀吸收，产生非平衡载流子 $\Delta p=\Delta n$ 为小注入。设其量子产额 $\beta=1$，表面对这种光的反射系数 $R=40\%$，光生载流子的寿命 $\tau=1.82\times10^{-3}$ s，电子迁移率 $\mu_n=2800cm^2/(V\cdot s)$ 空穴迁移率 $\mu_p=700cm^2/(V\cdot s)$，普朗克常数 $h=6.6\times10^{-34}J\cdot S$，光速 $C=3\times10^{10}cm/s$（如图 10-10 所示）。

试求：室温（300K）下样品光照面和底面之间的开路电压 $V_x$。

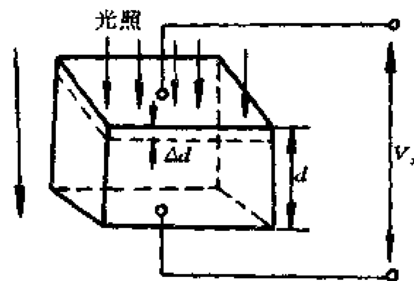



图 10-10

〔解〕 以光子数计算进入半导体的光强度：

$$I=\frac{P(1-R)}{h\nu}=\frac{4.4\times10^{-3}\times0.6}{6.6\times10^{-34}\times\frac{c}{\lambda}}$$

$$=\frac{4.4\times10^{-3}\times0.6}{6.6\times10^{-34}\times\frac{3\times10^{10}}{0.75\times10^{-4}}}=10^{16}(1/(cm^2\cdot s))$$

单位时间在面积上产生的电子-空穴对数 $Q=I\beta=10^{16}/cm^2\cdot s$

若忽略 $\Delta d$ 内复合的载流子数目不计，则单位时间在单位面积上产生的非平衡空穴全部沿 $x$ 方向扩散，因此

$$-D_p\frac{d\Delta p(x)}{dx}\Big|_{x=0}=Q$$

$\because$ $d\gg L_p$ $\therefore \Delta p(x)=\Delta p_0 e^{-\frac{x}{L_p}}$ 代入上式后得：

$$\frac{D_p}{L_p}\Delta p_0=Q \qquad 式中，L_p=\sqrt{D_p\tau_p}$$

$$\therefore \qquad \Delta P_0=\frac{L_p}{D_p}Q=\sqrt{\frac{\tau_p}{D_p}}Q$$

根据爱因斯坦关系：$D_p=\frac{k_0T}{q}\mu_p=0.026\times700$
$=18.2(cm^2/s)$

$$\Delta P_0=\sqrt{\frac{1.82\times10^{-3}}{18.2}}\times10^{16}=10^{14}(1/cm^3)$$

达到稳定后，由于电子和空穴扩散系数不同，在各处形成的电场所引起的漂移电流恰好与扩散电流相抵消，即：

$$J_x=(nq\mu_n+pq\mu_p)\varepsilon_x+q(D_n-D_p)\frac{d\Delta p}{dx}=0$$

$$\therefore \qquad \varepsilon_x=-\frac{D_n-D_p}{n\mu_n+p\mu_p}\frac{d\Delta p}{dx}=-\frac{kT}{q}\frac{\mu_n-\mu_p}{n\mu_n+p\mu_p}\frac{d\Delta p}{dx}$$

对于 $n$ 型半导体，$n_0\gg p_0$ 且为小注入情况

$$\therefore \qquad \varepsilon_x=-\frac{k_0T}{q}\frac{\mu_n-\mu_p}{n_0\mu_n L_p}\frac{d\Delta p}{dx}$$

$$=\frac{k_0T}{q}\frac{\mu_n-\mu_p}{n_0\mu_n L_p}(\Delta p_0)e^{-\frac{x}{L_p}}$$

因而沿光照方向产生电势差：

$$V_x=\int_0^d \varepsilon_x \mathrm{d}x=-\frac{k_0T}{q}\frac{\mu_n-\mu_p}{n_0\mu_n}\int_0^d\frac{\mathrm{d}\Delta p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{k_0T}{q}\frac{\mu_n-\mu_p}{n_0\mu_n}[(\Delta p)_0-(\Delta p)d]$$

∵ $d\gg L_p$， ∴ $(\Delta p)d=0$

故 $$V_x=\frac{k_0T}{q}\frac{\mu_n-\mu_p}{\mu_n}\frac{(\Delta p)_0}{n_0}$$

代入已知数据：$V_x=0.026\times\frac{2800-700}{2800}\times\frac{10^{14}}{10^{16}}=1.95\times10^{-4}(\mathrm{V})$

## 习　题

10—1　0.46μm 的 GaAs 样品，被一单色光照射，光子能量 $h\nu=2\mathrm{eV}$，GaAs 对该光的吸收系数 $\alpha=5\times10^4\mathrm{cm}^{-1}$，照射样品光的能量为 10mW。

(1)计算被样品吸收的光的能量；(J/s)

(2)计算电子在复合以前传给晶格过剩热能的速率；

(3)求每秒钟由于复合发射出的光子数。

$(9\times10^{-3}\mathrm{J/s},2.57\times10^{-3}\mathrm{J/s},2.81\times10^{16}/\mathrm{s})$

10—2　设一块 n 型半导体材料室温下暗电导为 $100/\Omega\cdot\mathrm{cm}$，用波长 $\lambda=2\mu\mathrm{m}$ 的光照射样品，其吸收系数 $\alpha=10^3/\mathrm{cm}$，光强 $I=10^{-3}\mathrm{W/cm^2}$，测量得知稳态光电导与暗电导的比 $\gamma=10$，寿命 $\tau$ 为 $10^{-4}\mathrm{s}$。求相应的量子产额。

设：$n_i=1.5\times10^{10}/\mathrm{cm}^3$，$b=\frac{\mu_n}{\mu_p}=10$，$\mu_n=1000\mathrm{cm^2/V\cdot s}$，$h=1\times10^{-34}\mathrm{W\cdot s^2}$。

10—3　如图 10-11 所示，一光强为 $I_0$ 的本征吸收光 $\lambda$ 照射到吸收系数为 $\alpha$ 的 n 型半导体上，试求光生开路电压的表达式。设：(1)$I_0$ 为单位面积上的光子流。

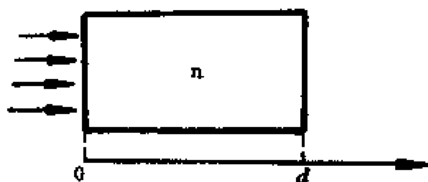



图 10-11

在 $x\leqslant-\frac{1}{2}$时入射光被均匀吸收，量子产额为 1。

在 $x>-\frac{1}{\alpha}$，光吸收为零。

(2)扩散长度 $L\gg1/\alpha$，迁移率为 $\mu_n$、$\mu_p$，表面复合速度为 $s$，样品厚度 $d\gg L$。

(3)可用小注入近似。

10—4　设 $p^+$-n 结二极管受到一光源吸收均匀的照射，所引起的电子-空穴对产生率为 $g_L$，求解光生载流子在 n 区的扩散方程，证明：

$$\Delta P_n(x)=[P_{n0}(e^{-\frac{V}{V_T}}-1)-g_L\frac{L_p^2}{D_p}]e^{-\frac{x}{L_p}}+\frac{g_LL_p^2}{D_p}$$

式中： $$V_T=\frac{k_0T}{q}$$

10—5　根据上题结果，推导被光均匀穿透照射的 p-n 结其光生电流为 $I_L=qg_L(L_n+L_p)A$。

10—6 设一n型Ge样品，截面积为$10^{-2}cm^2$，长为1cm，掺杂浓度为$10^{14}/cm^3$，室温下均匀照射该样品，产生的非平衡载流子寿命为$\tau_n=\tau_p=100\mu s$，光照产生率为$10^{17}/cm^3$，试求样品的暗电阻和光照下电阻的比值。

10—7 一长条形光敏电阻，其截面为$A$，长为$L$，外加固定电压$V$；光照下均匀产生电子-空穴对，其产生率为$g_L$。若$\mu_n \gg \mu_p$，则可认为光照产生的电流$\Delta I$主要由非平衡电子形成的，试证明：光敏电阻由于光照，其电流改变量为$\Delta I = qAg_L \frac{\tau_n}{\tau_t}$。式中，$\tau_n$为非平衡电子寿命，$\tau_t$为电子沿样品长度方向的渡越时间。

10—8 光照射在Ge表面，吸收光子后Ge表面上每秒产生$10^{18}/cm^3$的电子-空穴对，Ge中含有$10^{15}/cm^3$的浅施主，且晶体厚度远大于扩散长度。

设复合只发生在体内，且$\tau_n=\tau_p=10^{-6}s$，$D_n=100cm^2/s$，$D_p=50cm^2/s$，求电子密度和空穴密度沿距离分布函数。

10—9 假设电子空穴密度相等，而且发生带与带之间的跃迁，计算室温下GaAs样品处于粒子数分布反转状态时最小的载流子密度。设室温下GaAs本征载流子浓度为$10^7/cm^3$。

10—10 在GaAs的基本吸收限上，对波长为8000Å的光的吸收系数为$10^4/cm$，试求这种光的透入深度。

10—11 有n型硅做成的光敏电阻，硅材料的电阻率为50Ω·cm，几何尺寸为：长1cm，宽0.5cm，厚100μm，空穴的寿命为$10^{-6}s$，忽略表面复合。已知光子能量为1.5eV的单色光照射到样品最大表面上，每秒钟内在$1cm^2$面积上入射$10^{17}$个，则这个光敏电阻在光照射下电阻改变多少？若设光敏电阻中有空穴陷井，则在$10^{-3}s$内有$\frac{1}{2}$的光生空穴被陷井所陷，则在同样的光照下，若外加10V电压，此时流过光敏电阻的电流为多少？

10—12 一方形光脉冲照射到暗电阻为15kΩ的光敏电阻上。光照稳定后，使光敏电阻的阻值由15kΩ变为3kΩ，光敏电阻和一个阻值为1kΩ的外接电阻相串联(如图10-12所示)。外加直流电源为2V，若光生非平衡载流子寿命为$10^5s$，光脉冲照射时间为0.5ms，断开时间为0.5ms，求电阻$R_L$上的电压，并画出波形图。

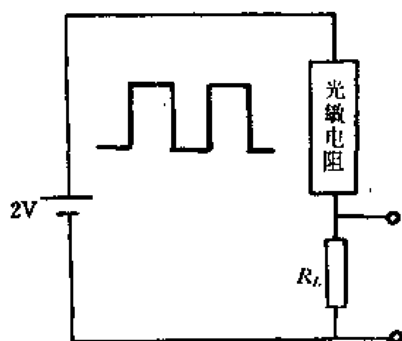



图10-12

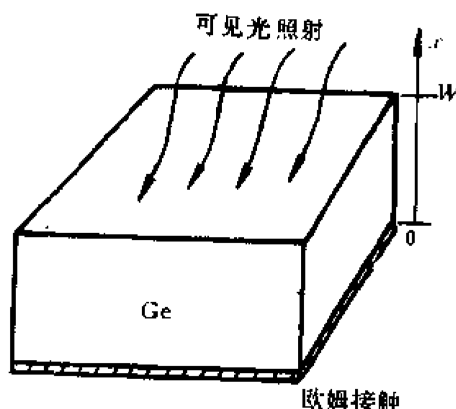



图10-13

10—13 图10-13为均匀掺杂的Ge薄层样品，其一边为欧姆接触，而样品上表面用一束强光照射。其光子能量在1.7eV和4.1eV之间。Ge样品对该光的衰减系数$10^4dB/cm$。因此，实际上光线在表面层几个微米区就完全被吸收。设穿透表面的每一个光子基本上产

生 1 个电子-空穴对。已知：Ge 掺受主杂质元素 Ga 的浓度为 $10^{17}/cm^3$，$\mu_n=2000cm^2/(V\cdot s)$，$\mu_p=1000cm^2/(V\cdot s)$，$E_g=0.64eV$，样品厚 $W=200\mu m$，$\tau_n=2\times10^{-6}s$，光照下非平衡载流子产生率 $g_L=10^{16}/cm^2\cdot s$，设温度均匀无热梯度。试求：

(1)由于载流子分布不均匀造成的电势 $V$；

(2)由于载流子运动引起的能量流。

10—14　在面积为 $10^{-4}m^2$ 的 Ge 表面结光电池中，表面 $p$ 型受主浓度为 $10^{25}m^{-3}$，n 型层施主浓度为 $10^{22}m^{-3}$，假设 $m_n^*=m_p^*=m_0$，$E_g=0.72eV$，空穴寿命 $\tau_p=10^{-6}s$，空穴扩散系数 $D_p=4.4\times10^{-3}m^2/s$，$T=300K$，试计算下列各量：

(1)n 型区热平衡空穴浓度；

(2)二极管饱和电流；

(3)给出 1mV 光电压所需的光电流；

(4)用前一问结果，计算产生这个光电流所需钠光($\lambda=5890Å$)的强度。

# 第十一章　半导体的热电性质

## 内容提要

半导体的热电性质是指半导体把热能转换成电能的温差电现象。实质上是热现象和电现象通过电子动能和费米能级相互联系起来的一种效应。主要有塞贝克效应，帕尔帖效应和汤姆逊效应。

(1)塞贝克或温差电效应：

当两种不同的半导体相接成一个闭合回路时，如果两个接头具有温度差 $\Delta T$，则在回路中有电流通过，称为温差电流，产生此电流的电动势称为温差电动势。当回路开路时，两端产生电势差 $\Delta V$，其大小依赖于温差和物质本身的性质：

$$\Delta V = \alpha_{ab}\Delta T$$

$\alpha_{ab}$为塞贝克系数，即单位温差时的温差电动势。在温度不同的各点载流子浓度不同，扩散作用引起电荷分离，导致建立电场 $E^a$，温差电场 $E^a$ 又会阻止电荷进一步分离。温差电场 $E^a$ 引起的传导电流 $j_E=\sigma E^a$ 抵消了由载流子浓度梯度引起的扩散电流 $j_D=-qD_s\Delta n$，有：

$$j = j_E + j_D = 0 \qquad \alpha = \frac{qD}{\sigma}\frac{dn}{dT}$$

据此可求得 n 型和 p 型半导体的塞贝克系数为：

p 型半导体：
$$\alpha_p=\frac{k_0}{q}\left(\frac{3}{2}+\xi_p\right)$$

n 型半导体：
$$\alpha_n=-\frac{k_0}{q}\left(\frac{3}{2}+\xi_n\right)$$

式中：
$$\xi_p=\frac{E_F-E_v}{k_0T}=-\ln\frac{P}{N_v}$$

$$\xi_n=\frac{E_c-E_F}{k_0T}=-\ln\frac{n}{N_c}$$

对于两种载流子参与导电的半导体：

$$\alpha=\frac{\alpha_n\sigma_n+\alpha_p\sigma_p}{\sigma_n+\sigma_p}$$

(2)帕尔帖效应：当两种不同的半导体或半导体与金属接触通以电流时，根据电流方向的不同，在接头处除产生焦耳热以外，还要吸热或放热的现象称为帕尔帖效应。

$$\Delta Q = \pi_{ab}J$$

$\pi_{ab}$为帕尔帖系数。对于杂质浓度不同的同一导电类型的两种半导体 $A$ 和 $B$：

$$\pi_{ab}=\pm\frac{k_0T}{q}\ln\frac{p_a}{p_b}\quad\left(\text{或 } \pi_{ab}=\pm\frac{k_0T}{q}\ln\frac{n_a}{n_b}\right)$$

当电流由 $A$ 流向 $B$ 时，$\pi_{ab}$为正，反之为负。

(3)汤姆逊效应：当电流通过有温度梯度的半导体时，原有的温度分布将被破坏。为了

维持原有的温度分布，则半导体中除产生焦耳热以外，还要吸热或放热，这种效应称为汤姆逊效应。

$$\Delta Q = J_x \sigma^T \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$\sigma^T$ 为汤姆逊系数。对 n 型和 p 型半导体分别为：

$$\sigma_n^T = \frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}E_F}{\mathrm{d}T} + \frac{E_C - E_F}{qT} \qquad \sigma_p^T = \frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}E_F}{\mathrm{d}T} + \frac{E_v - E_F}{qT}$$

(4)开耳芬关系式：

第一关系式： $\pi_{ab} = \alpha_{ab} T$

第二关系式： $\sigma_a^T - \sigma_b^T = -T\frac{\mathrm{d}\alpha_{ab}}{\mathrm{d}T}$

## 问　题

11—1　说明热探针测定半导体材料导电类型的原理，你认为这种方法对高阻和低阻材料的可靠性如何？为什么？

11—2　如何区分温差电效应和温差电动势率。

11—3　何谓塞贝克效应？用能带论说明 p 型半导体的塞贝克效应。

11—4　何谓声子引曳效应？试解释低温时温差电动势增大的原因。

11—5　为什么半导体的温差电效应比金属大得多？

11—6　定性比较声子和载流子对热导率贡献的机构有何不同？

11—7　试根据帕耳帖效应画出半导体致冷器的装置示意图，并说明其工作原理。

11—8　说明半导体温差发电器的工作原理。

11—9　制造高效率的半导体温差发电器和致冷器，对半导体材料有何选择。

## 解题示例

**例 1**　试求出在室温下本征硅的塞贝克系数。

设电子和空穴的有效质量相等，硅的禁带宽度为 1.12eV，电子和空穴的迁移率分别为 0.135cm²/(V・s)和 0.048cm²/(V・s)。

〔解〕　电子和空穴两种载流子存在的塞贝克系数为：

$$\alpha = \frac{k}{q}\frac{p\mu_p\left(\frac{3}{2} + \xi_p\right) - n\mu_n\left(-\frac{3}{2} + \xi_n\right)}{(p\mu_p + n\mu_n)}$$

对本征半导体，　$p = n$

又因为 $m_n^* = m_p^*$，故　$E_i = \frac{1}{2}E_g$，因此

$$\xi = \frac{E_g}{2k_0T} = \frac{1.12}{2 \times 8.63 \times 10^{-5} \times 300} = 21.6$$

$$\alpha = 8.63 \times 10^{-5} \times \frac{0.048\left(\frac{3}{2} + 21.6\right) - 0.135\left(\frac{3}{2} + 21.6\right)}{0.135 + 0.048}$$

$$= -94.8 \times 10^{-5}\text{V/K} = -948\mu\text{V/K}$$

**例 2**　试证明半导体温差发电器的转换效率 $\eta$ 为

$$\eta = \frac{\Delta T}{2T_0 - \frac{\Delta T}{2} + 4\frac{(K_a + K_b)(R_a + R_b)}{\alpha_{ab}}}$$

式中，$K_a$、$K_b$、$R_a$、$R_b$ 分别表示温差发电器热电偶 $A$ 和 $B$ 的总热导和总电阻。$\alpha_{ab}$为相对塞贝克系数，$T_0$ 为热接点温度，设样品中产生线性的温度梯度，并忽略汤欧逊效应影响。

〔解〕　如图 11-1 所示，两种材料 $A$ 和 $B$ 的一端接欧姆接触并维持温度 $T_0$，另一端温度保持 $T_1$ 且两端连接负载电阻 $R_L$。

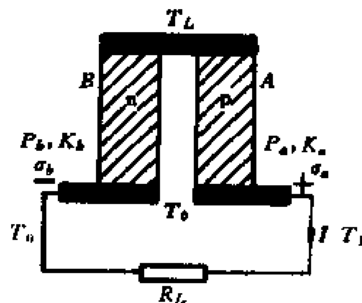


图 11-1

稳态时，由于温度差（$\Delta T = T_0 - T_1$）而产生塞贝克电压（$\alpha_{ab} \cdot \Delta T$）。因此，在电路中有电流 $I$ 流过，负载电阻两端得到 $R_L I^2$ 的功率，从而实现热能转换为电能。

由于热量传导的连续性，在热电偶中任一截面上流入和流出热量的总和应该等于零。单位时间从高温端 $T_0$ 流出的热量有两部分：热传导流出热量 $Q_k$ 和材料中流过电流引起的帕耳帖效应而产生的热量 $Q_p$。

$$Q_{出} = Q_k + Q_p$$

流入高温端的热量也分为两部分：由于材料电阻而产生的焦耳热 $Q_j$ 的一半流入高温端，另一端流入低温端，从高温端周围的介质流入的热量为 $Q_a$，根据热量传导的连续性，有如下关系：

$$Q_a + \frac{1}{2}Q_j = Q_p + Q_k$$

式中，$Q_p = \pi_{ab} \cdot I = \alpha_{ab} \cdot T_0 \cdot I$（开耳芬第一关系式）；$Q_j = I^2(R_a + R_b)$；$Q_k = (K_a + K_b) \cdot \Delta T$。代入上试得：

$$Q_a = \alpha_{ab} T_0 \cdot I + (K_a + K_b)\Delta T - \frac{I^2}{2}(R_a + R_b)$$

当 $R_L = R_a + R_b$ 时，流过的电流 $I_0$ 为：

$$I_0 = \frac{\alpha_{ab} \cdot \Delta T}{(R_L + R_a + R_b)} = \frac{\alpha_{ab} \cdot \Delta T}{2(R_a + R_b)}$$

在负载电阻 $R_L$ 上得到最大输出功率 $P_0$：

$$P_0 = I_0^2 R_L = \frac{(\alpha_{ab} \cdot \Delta T)^2}{4R_L}$$

转换效率 $\eta$ 为（以 $I_0$ 代替 $Q_a$ 式中 $I$）：

$$\eta = \frac{P_0}{Q_a} = \frac{\frac{\alpha_{ab}^2 \Delta T^2}{4R_L}}{\frac{\alpha_{ab} \cdot T_0 \cdot \Delta T}{2(R_a + R_b)} - \frac{\alpha_{ab}^2 \cdot \Delta T^2}{8(R_a + R_b)} + (K_a + K_b) \cdot \Delta T}$$

$$= \frac{\Delta T}{2T_0 - \frac{\Delta T}{2} + 4\frac{K_a + K_b(R_a + R_b)}{\alpha_{ab}^2}}$$

## 习　题

11—1　求室温下载流子浓度为 $10^6/cm^3$ 的 n 型和 p 型 Ge 的塞贝克系数。

11—2　求室温下 n 型 Ge 中晶格振动对电导率的贡献和传导载流子对热导率贡献相等的载流子浓度。设声速为 $5\times10^5$cm/s，声子平均自由程为 30Å，晶格比热＝0.451/(cm$^3$·K)，$\mu_n=3500$cm$^2$/(V·s)。

（利用 $K_e=2k_0^2\sigma^{T}/q^2$，$K_p=\frac{1}{3}C_v\cdot v\cdot l_p$，可得 $\sigma=2.1\times124/(\Omega\cdot cm)$，$n\approx3.8\times10^{19}$/cm$^3$）

11—3　硅与铜接触，铜一端温度为 100℃，硅一端温度为 0℃。求(1)稳定时硅与铜接触面上的温度。(2)单位时间由铜传递给硅的热量。设铜和硅的热导率分别为 3.9W/(cm·K)和 0.84W/(cm·K)，并不考虑其他热损失。

11—4　有两块均匀为 n 型的半导体样品，其电阻率分别为 $\rho_1=0.01\Omega\cdot cm$ 及 $\rho_2=0.1\Omega\cdot cm$，试计算这两种半导体组成温差电偶时的温差电动势率（设二种半导体的迁移率相等）。

11—5　试证明本征半导体和金属接触时，帕尔帖系数为：

$$\pi_{sb}=\frac{k_0T}{q}\frac{b-1}{b+1}\left(2+\frac{E_g}{2k_0T}\right)$$

11—6　空穴浓度为 $10^{16}/cm^3$ 的 p 型硅，冷端温度为 0℃，热端温度为 50℃，主要考虑长声学波散射时，试求温差电动势。

# 第十二章　半导体磁和压阻效应

## 内 容 提 要

(1)通电半导体垂直电流方向加磁场后，在垂直于电流和磁场的方向上产生横向电场，这个现象称为霍耳效应。横向电场称为霍尔电场。霍尔效应的实质是带电粒子在磁场中运动受到洛仑兹力的结果。

实验测定表明：霍尔电场 $E_y$ 与电流密度 $j_x$ 和磁感应强度 $B_z$ 成正比，即 $E_y = R_H j_x B_z$；比例系数 $R_H$ 称霍尔系数。对于不同的材料，其弱场霍尔系数 $R_H$ 如附表 1 所示。

附表 1

| | | n 型半导体 | p 型半导体 |
|---|---|---|---|
| 一种载流子导电 | 不计入速度分布 | $R_H = -\frac{1}{nq}$ | $R_H = \frac{1}{pq}$ |
| | 计入载流子速度统计分布： | $R_H = -\frac{1}{nq}\frac{\langle\tau^2 v^2\rangle\langle v^2\rangle}{\langle\tau v^2\rangle^2}$ | $R_H = \frac{1}{pq}\frac{\langle\tau^2 v^2\rangle\langle v^2\rangle}{\langle\tau v^2\rangle^2}$ |
| 二种载流子导电 | 不计入速度分布 | $R_H = \frac{1(p-nb^2)}{q(p+nb)^2}$ | |
| | 计入载流子速度统计分布 | $R_H = \frac{\mu_H}{\mu}\frac{1}{q}\frac{(p-nb^2)}{(p+nb)^2}$<br>式中，$\mu_H$ 为霍尔迁移率，$\mu_H = \sigma R_H$ | |

利用霍尔效应可以判断半导体材料的导电类型，测量半导体的载流子浓度和迁移率。低温下霍尔效应实验还是研究半导体材料补偿度和杂质电离的有效方法。

(2)磁阻效应是指半导体的电阻率随磁场改变而变化，这种效应称为物理磁阻效应。磁阻效应还与样品的形状有关，不同几何形状的样品，在同样大小的磁场作用下，其电阻不同，这种效应称为几何磁阻效应。

若磁场和外加电场相互垂直时产生的磁阻效应称为横向磁阻效应。横向磁阻效应的强弱用横向磁阻系数 $\xi$ 表示。

$$\xi = \frac{1}{{\mu_H}^2 B_z^2}\frac{\rho_B - \rho_0}{\rho_0}$$

考虑载流子速度的统计分布，当磁场不太强($\mu_H B \ll 1$)，对等能面为球面的非单位半导体，两种载流子导电时：

$$\xi = \frac{npb(1+b)^2}{(nb^2-p)^2}$$

式中，$b=\mu_n/\mu_p$。

(3)将有温度梯度但无电流的半导体置于磁场中，此时所观察到的现象称为热磁现象。其根源在于带电粒子受到的洛仑磁力与速度的线性关系。热磁现象包括：

(a)爱廷豪森效应：当 $x$ 方向通电流，$z$ 方向加磁场，沿 $y$ 方向会产生温度梯度$\frac{\partial T}{\partial Y}$，其值和 $B_z$ 和 $J_x$ 之积成正比，即

$$\frac{\partial T}{\partial Y} = PJ_xB_z$$

式中，$P$ 为爱廷豪森系数($m^3 \cdot K/J$)。

(b)能斯脱效应：当热流沿 $x$ 方向通过样品时，在 $z$ 方向加磁场，沿 $y$ 方向会产生电动势。若改变磁场或热流的方向，电动势的方向也将改变，电动势的大小与$\frac{\partial T}{\partial X}$和 $B_z$ 成正比。即

$$E_y = \eta \frac{\partial T}{\partial X}B_z$$

式中，$\eta$ 为能斯脱系数($m^2/(K \cdot s)$)。

(c)里纪-勒杜克效应：当有热流$\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)$通过样品时，与样品表面垂直的磁场($B_z$)可使样品的两旁产生温差$\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)$，如改变磁场方向，则温度梯度方向随之改变。这种现象称为里纪-勒杜克效应。$\frac{\partial T}{\partial Y}$与 $B_z$ 及$\frac{\partial T}{\partial X}$成正比，即：

$$\frac{\partial T}{\partial Y} = S\frac{\partial T}{\partial X}B_z$$

式中，$S$ 为里纪-勒杜克系数($m^2/(V \cdot s)$)。

(4)光磁电效应。用能被半导体强烈吸收的光照射置于磁场中的半导体样品，半导体中在垂直于磁场和光子流的方向产生横向电场。这种现象称为光电磁效应。产生电场的原因是磁场使载流子漂移流和扩散流偏离它们原来的方向。光电磁效应广泛地用来研究半导体中的非平衡过程。

(5)磁二极管是利用电子、空穴的双注入效应和复合效应巧妙结合而成的一种对磁场很敏感的半导体器件，它的基本结构为 $p^+$-i-$n^+$ 或 $p^+$-$\pi$-$n^+$；工作时加正向电压。

(6)压阻效应是指应变引起半导体的电阻率变化。其物理原因在于，应变使半导体能带结构发生变化。对于能带结构复杂的半导体材料(如 n-Si，n-Ge)，单轴应力引起晶体各向异性应变，使导带中各个等同能带相对位置发生变化，引起电子的重新分布，从而改变载流子的迁移率，即改变了半导体电阻率。半导体在液体静压强作用下仅使能带极值发生移动；禁带宽度的变化引起载流子浓度的变化，因而使电阻率变化。

p 型硅中观察到较显著的压阻效应是由于各向异性应力解除了能带简并，由于轻、重空穴迁移率不同，它们对电阻率的贡献也不同，即使空穴总数保持不变，也会使电阻率发生变化。

# 问　题

12—1　霍尔电压是如何产生的?一块掺杂较重的 n 型半导体,加上如图 12-1 所示的电磁场以后,试判定霍尔电场的方向。甲认为:在电场 $E_x$ 作用下,电子向左运动,受磁场 $B_z$ 作用后向($-y$)方向偏转,得到的电场 $E_y$ 如图中左边所示。乙认为:电子向左边运动等效于空穴向右运动,空穴受到磁场 $B_z$ 作用后向($+y$)方向偏转,得到如图中右边所示的电场。试指出正误,并简要说明之。

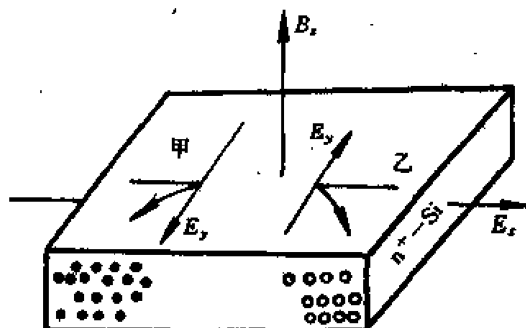



图 12-1

12—2　解释 p 型半导体霍尔系数改变符号的原因。

12—3　区别:电导迁移率,漂移迁移率和霍尔迁移率。

12—4　实验发现当载流子类型改变时,霍尔系数也改变正负号,因此必存在电子和空穴的某一比例,在此条件下霍尔系数为零。试确定弱场条件时这种情况下电子浓度和空穴浓度的比例。

12—5　当霍尔系数 $R_H=0$ 时,则霍尔迁移率 $\mu_H$ 必为零,如何理解迁移率为零的物理意义?

12—6　用 5Ω · cm 的 n-Si 作霍尔片,因为 $R_H=\frac{V_H d}{I_x B_z}$,所以霍尔片作得厚一些,霍尔系数就会大些"。这种说法对吗? 为什么?

12—7　两种材料和几何形状完全相同的样品平行地置于均匀磁场中,如图 12—2。当两块样品沿相同方向通以相同电流时,问霍尔电磁方向是否相同?电场强度哪个大?霍尔电势差哪个大? 为什么?

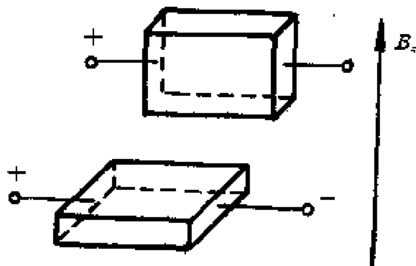



图 12-2

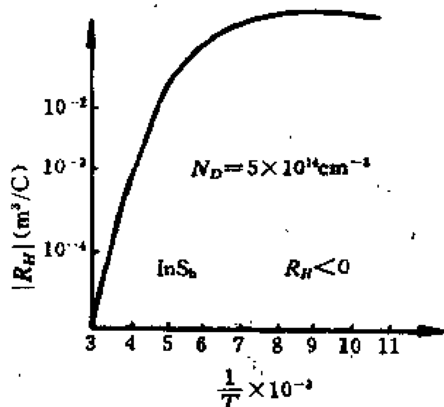



图 12-3

12—8　何为霍尔角? 与磁场强度 $B_z$ 和载流子迁移率的关系如何?

12—9　两种载流子对霍尔效应都有贡献的 InSb 材料,掺杂浓度为 $N_D=5\times10^{14}$/

$cm^3$，其霍尔数与温度关系如图 12-3 所示。说明霍尔系数随温度变化的原因。

12—10　低温下测量霍尔系数是一种测定杂质电离能的有效方法。试说明测试原理并设计测定 n 型半导体杂质能级的霍尔实验。

12—11　为什么半导体的霍尔效应比金属大得多？

12—12　一稳定的光照射置于恒定磁场中 n 型半导体样品（$n_0 \gg p_0$），测量其光磁电效应的横向电势差。样品尺寸为：$l=3cm, b=2cm, d=1cm$（如图 12-4 所示），少子扩散长度 $L_p=10\mu m$，一共测量三次。

第一次：$x$ 方向光照，$z$ 方向加磁场；

第二次：$x$ 方向光照，$(-y)$ 方向加磁场；

第三次：$y$ 方向光照，$z$ 方向加磁场。哪一次测量的横向电势差最大？哪一次测量的横向电势差最小？

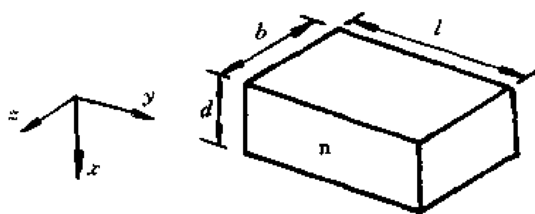



图 12-4

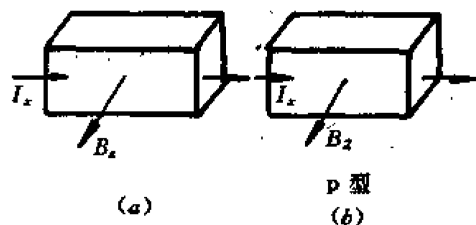



图 12-5

(a)n 型；　(b)p 型。

12—13　图 12-5 中，(a)为 n 型样品，(b)为 p 型样品，所加的电流 $I_x$ 和磁场 $B_z$ 的方向如图所示。试画出霍尔电场的方向并指明由于爱廷豪森效应所造成的温度高的面和温度低的面。

12—14　热磁电效应有哪几种？分别画出简单示意图表示之。

12—15　说明磁二极管的工作原理。

12—16　某块重掺杂的 p 型半导体样品，其上所加 $j_x$ 和 $B_z$ 已确定。室温下，甲认为：若掺杂 $N_A$ 越大，空穴浓度 p 越大，则受洛仑磁力作用偏转到样品侧面的空穴就越多，故霍尔效应越显著。乙认为：若掺杂 $N_A$ 越大，则 $R$ 越小，霍尔效应越不显著。试指出正误，并定性分析之。

12—17　在考虑载流子速度统计分布时，说明 n 型半导体产生磁阻效应的原理，问哪一个是正确的？(1)表示洛仑磁力与霍尔电场力相平衡的电子的运动；(2)表示较大速度的电子；(3)表示速度较小的电子。

12—18　试分析如图 12-7 所示的光磁电效应引起的电场方向，并指出它与霍尔效应的区别。

12—19　两个几何形状完全相同的样品，一个是掺杂 $N_D=10^{16}/cm^3$ 的 n 型硅，一个是掺杂 $N_A=10^{16}/cm^3$ 的 p 型硅，今以相同频率的二束光强相等的光照两样品的相应表面，两样品的吸收系数和量子效率均相等，表面的透射系数也相等，产生的丹倍电势差哪个大？场强 $E_x$ 哪个大？为什么？

12—20　p 型锑化铟的霍尔系数 $R_H$ 与温度的关系如图 12-8 所示，虚线和实线代表不同的掺杂浓度。每个样品的曲线都包含两支；右面低温区 $R_H$ 为正值，左面高温区一支为

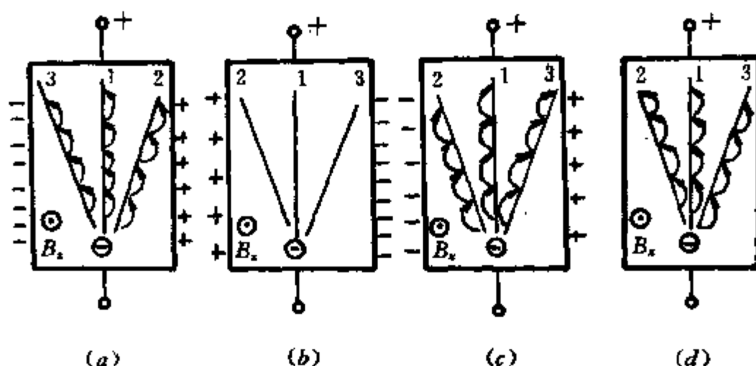


图 12-6

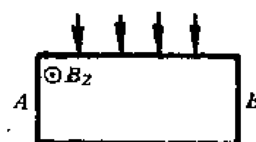


图 12-7

负值。试分段说明 $R_H$ 随温度变化的规律并予以解释。

12—21 何谓压阻系数？说明压阻系数的正负号的物理意义？

12—22 实验发现，W-Ge 在液体静压强作用下电阻率也随压强而变化，在压强低于 $10^4$bar 时，电阻率随压强增大而稍有增大，超过 100mPa 后，电阻率随压强增而迅速增大。电阻率的变化是由什么原因引起的？为什么在不同的压力范围电阻率随压强的变化率有显著的不同？

12—23 定性说明为什么 n-Si 沿(111)加应力，在(111)方向通电流测电阻时的压阻系数比较小？

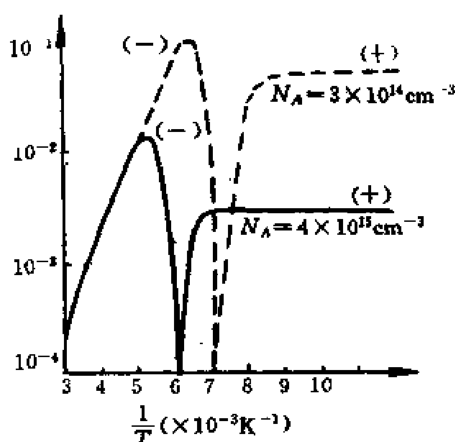


图 12-8

12—24 实验发现，掺杂浓度 $N_A=10^{17}/\text{cm}^3$ 的 InSb 在 240K 的温度下，电导率并不随液体静压强的增加而变化基本上是一常数，这是什么原因？

12—25 沿 n-Ge 的(110)方向施加单轴应力，测量(110)方向的电阻，施加应力时电阻变大还是变小？同样的测量方法，对 p-Ge 电阻率变大还是变小？

12—26 对 InSb 半导体材料施以液体静压强，在不同温度和不同的液体静压强下测其电阻。试问(1)压强不变，保持 40mPa，60℃时的电阻大还是 100℃时的电阻大？为什么？(2)温度不变，保持 90℃，2 千巴时电阻大还是 40mPa 时的电阻大？为什么？(3)在 0℃时，80mPa 的电阻大还是 120mPa 时的电阻大？为什么？

12—27 已知 n-Si 在液体静压强的作用下，压强增大，禁带宽度减小。据此判断当 n-Si 受到(100)方向的单轴拉应力时，(100)、(010)、(001)方向上的能谷值升高还是降低？施加拉应力后电子又是如何转移的？

12—28 对 n-Si 和 n-Ge 施加 20mPa 的单轴应力，为使其电阻率变化最大，应力应分别加在什么方向上？为使电阻率变化最小应力应加在什么方向上？为什么？

12—29 声波和光波与半导体相互作用的本质有何区别？声波在半导体中传播时与半导体中的载流子相互作用有哪两种机构？

12—30 何谓超声放大效应？放大的声波能量的增加是从哪里来的？

12—31　何谓声磁电效应？与光磁电效应有何异同？

## 解 题 示 例

**例 1**　一个磁场 $B$ 和一个电场 $E$ 相互垂直(如图 12-9 所示)。设一个电子在原点由静止开始运动，试确定该电子的运动轨迹。

〔解〕　电场 $E$ 作用在电子上的力指向 $+x$ 轴，磁场 $B$ 所形成的洛仑兹力总与 $B$ 垂直。因此，电子在 $y$ 方向上不受力的作用。故列出电子的运动方程如下：

$$m_0\dot{v}_x = qE - qv_zB \qquad (1)$$

$$m_0\dot{v}_z = qv_xB \qquad (2)$$

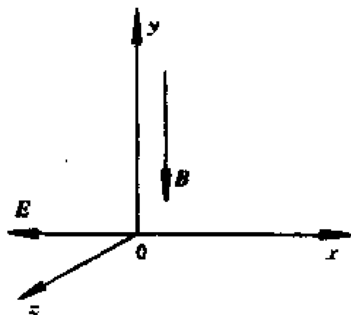


图 12-9

由(1)得：

$$\frac{dv_x^2}{dt^2} = -\frac{qB}{m_0}\frac{dv_z}{dt} = -\omega\frac{dv_z}{dt} = -\omega\frac{dv_z}{dt}$$

$$(\omega = \frac{qB}{m})$$

由(2)得：　$\frac{dv_z}{dt} = \frac{qB}{m_0}v_x$，代入上式得：

$$\frac{dv_x^2}{dt^2} = -\omega^2 v_x \qquad (3)$$

设方程(3)的解为：$v_x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

式中，$A$ 和 $B$ 是由初始条件确定的常数，当 $t=0$ 时，$v_x = v_z = 0$

∴　$A=0$　　故：$v_x = B\sin\omega t$

又根据式(1)：当 $t=0$，　$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qE}{m_0}$　　$(\because v_z = 0)$

又　　$B\omega = \frac{qE}{m_0}$

∴　　$B = \frac{qE}{m_0\omega} = \frac{E}{B} = u$

故　　$v_x = u\sin\omega t \qquad (4)$

把 $v_x$ 代入式(1)即可求得：

$$v_z = u - \frac{1}{\omega}\frac{dv_x}{dx} = u - u\cos\omega t \qquad (5)$$

由式(4)得：

$$x = \int v_x dx = \int u\sin\omega t dt = -\frac{u}{\omega}\cos\omega t + c$$

∵当 $t=0$ 时　$x=0$，　∴式中常数 $c = \frac{u}{\omega}$

故：　　$x = \frac{u}{\omega}(1-\cos\omega t)$

由式(5)得：

$$Z = \int v_z dt = \int (u - u\cos\omega t)dt = ut - \frac{u}{\omega}\sin\omega t + D$$

∵当 $t=0, Z=0$　　∴式中常数 $D=O$

故
$$Z=ut-\frac{u}{\omega}\sin\omega t$$

由
$$x=\frac{u}{\omega}(1-\cos\omega t)$$
$$Z=ut-\frac{u}{\omega}\sin\omega t$$

可以看出：电子的运动轨迹是一个普通的圆滚线：即半径为$\frac{u}{\omega}$的一个圆，沿着如图 12-10 所示的直线(即 $z$ 轴)滚动，由圆周上一个点形成的轨迹。

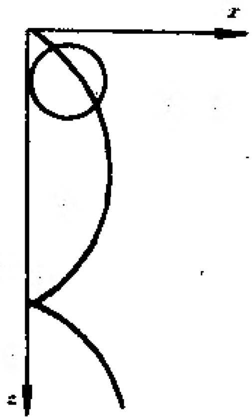


图 12-10

**例 2**　长 30mm，宽 6mm，厚 1mm 的 p 型半导体样品，其电阻值为 500Ω。把它放置于垂直样品平面的 0.5T 的磁场中，当通过样品的电流为 10mA 时，出现 5mV 的霍尔电压。试求半导体样品的霍尔迁移率和载流子浓度。

〔解〕　半导体的电导率：

$$\sigma=\frac{l}{RA}=p_0 q\mu_p$$

式中，$l$ 是半导体的长度；$A$ 是它的截面积；$R$ 为其电阻。

霍尔系数：　$R_H=\frac{1}{p_0 q}=\frac{V_H\cdot d}{BI}$

$$\therefore p_0=\frac{BI}{qV_H d}=\frac{0.5\times10\times10^{-3}}{1.6\times10^{-19}\times5\times10^{-3}\times1\times10^{-3}}$$
$$=6.25\times10^{21}(1/\text{m}^3)$$

霍尔迁移率　$\mu_H=R_H\sigma_p=\frac{l}{p_0 qRA}$

$$=\frac{30\times10^{-1}}{1.6\times10^{-19}\times6.25\times10^{15}\times500\times1\times6\times10^{-2}}$$
$$=10^2(\text{cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s}))$$

**例 3**　试证明：电导率为最小值时硅的霍尔系数：

$$R_H=\frac{1}{q}\frac{1-b}{4n_i\sqrt{b}}\qquad 式中\quad b=\frac{\mu_n}{\mu_p}$$

$\mu_n$、$\mu_p$ 分别电子和空穴的迁移率，$n_i$ 为本征载流子浓度(不考虑载流子的速度统计分布)。

〔解〕　对于有两种载流子参与导电的半导体，其霍尔系数和电导率分别为：

$$R_H=\frac{1}{q}\frac{p-nb^2}{(p+nb)^2}\qquad 式中：b=\mu_n/\mu_p$$
$$\sigma=nq\mu_n+pq\mu_p$$

又∵
$$np=n_i^2$$

∴
$$\sigma=nq\mu_n=\frac{n_i^2}{n}q\mu_p$$

故当：$\frac{d\sigma}{dn}=q\mu_n-\frac{n_i^2}{n^2}q\mu_p=0$ 时，电导率有极小值，

此时，对应
$$n=n_i\sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}}=\frac{n_i}{\sqrt{b}}$$

$$p = n_i = \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_p}} = n_i\sqrt{b}$$

代入霍尔系数 $R_H$ 的表达式即得：

$$R_H = \frac{1}{q}\frac{n_i\sqrt{b - b^2\frac{n_i}{\sqrt{b}}}}{\left[n_i\sqrt{b + b\cdot\frac{m_i}{\sqrt{b}}}\right]^2} = \frac{1}{qn_i}\frac{\sqrt{b}(1-b)}{b(1+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}})^2}$$

$$= \frac{1}{q}\frac{(1-b)}{4n_i\sqrt{b}}$$；即得证。

**例 4** 一个锑化铟样品，室温时的空穴浓度为电子浓度的 9 倍，试计算霍尔系数 $R$ 的数值，并指出样品的导电类型。在这个问题中，能否根据霍尔系数的正负来判别导电类型？设室温时 $b=\mu_n/\mu_p=100$，$n_i=1.1\times10^{16}/\text{cm}^3$。

〔解〕 由题意知 $p=9n$，又 $np=n_i^2$

故可求得 $n=\frac{1}{3}n_i$， $p=3n_i$

将上述结果代入两种载流子的霍尔系数表达式：

$$R=\frac{p-nb^2}{q(p+nb)^2}=\frac{9-b^2}{q(9+b)^2}\cdot\frac{3}{n_i}\approx-\frac{b^2}{(9+b)^2}\frac{3}{n_iq}$$

$$=-\left(\frac{100}{109}\right)^2\cdot\frac{3}{1.1\times10^{16}\times1.6\times10^{-19}}$$

$$=-1.3\times10^3(\text{cm}^3/\text{C})$$

根据 $p=9n$，样品当然是 p 型的。由于 p 型样品在高温区霍尔系数改变符号，所以，尽管在室温下 $R<0$，样品却是 p 型的。由此例可知，当两种载流子对导电的贡献都不能忽略时，不能用 $R$ 的符号来判别导电类型。对于一个确定的样品，只有在一种载流子对导电起主要作用的较低温度范围内，才能依据 $R$ 的正负判断导电类型。

**例 5** 为了判断锗的导电类型，测得它的霍尔系数为负，而塞贝克系数为正，该材料的导电类型是什么？说明理由。

〔解〕 该材料为 p 型锗。

∵有两种载流子参加导电的霍尔系数为：

$$R_H=\frac{p\mu_p^2-n\mu_n^2}{q(p\mu_p+n\mu_n)^2}$$

虽然 $R_H<0$，即 $p\mu_p^2<n\mu_n^2$

但∵ $\mu_n\gg\mu_p$，∴即是在 $p>n$ 的情况下也可以得到负的霍尔系数，因此由 $R_H$ 的正负不能判定半导体的导电类型。

有两种载流子导电时的塞贝克系数：

$$\alpha_s=\frac{k_0[p\mu_p(\frac{3}{2}+\xi_p)-n\mu_n(\frac{3}{2}+\xi_n)]}{q(p\mu_p+n\mu_n)}$$

式中，$\xi_n=-l_n-\frac{n}{N_c}>0$，$\xi_p=-l_n\frac{p}{N_v}>0$

由 $\alpha_s>0$， 又∵ $\mu_n\gg\mu_p$

故必定得：　　$p>n$

即塞贝克系数为正，该材料必定为 p 型半导体。

**例 6**　声波以 $v_s=2\times10^3\mathrm{m/s}$ 的速度在 n 型半导体中传播，产生形变势效应，使势能沿声波传播的 $x$ 方向发生正弦形变化 $\Delta E_c$，如图 12-11 所示。不在能谷 $B$ 和 $D$ 处的电子就要往能谷底运动。设在正弦形的势能保持不变的情况下电子从 $A$ 运动到 $B$，或从 $C$ 运动到 $B$ 的平均速度的绝对值为 $V_e=1.2\times10^3\mathrm{m/s}$，载流子浓度 $n=5\times10^6/\mathrm{cm}^3$。问载流子处在波前(如 $A$ 到 $B$)的平均浓度是多少？占总体的百分比是多少？

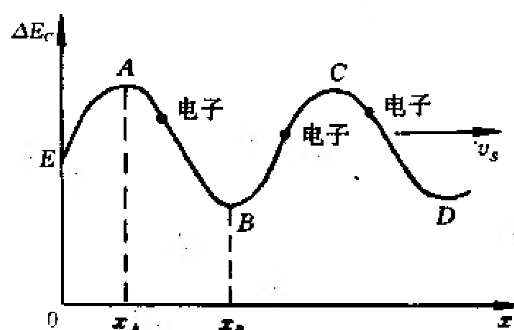



图 12-11

〔解〕　　$\because v_s>v_e$

$\therefore$ 处在 $AB$ 位置上的电子不能"滑到谷底"而是以$(v_s-v_e)$的速度相对 $\Delta E_c$ 的正弦形向上运动，即相对晶体而言，电子是往 $x$ 方向运动，$B$ 处的电子经过 $t_1$ 时间爬到 $BC$ 段某处后，以$(v_s+v_e)$的速度在波后向下滑；设电子在波后等待的平均时间为 $t_2$，则

$$t_1=\frac{\lambda}{2}/(v_s-v_e)$$

$$t_2=\frac{\lambda}{2}/(v_s+v_e)$$

故可认为波前$(AB)$平均电子浓度与波后平均电子浓度比等于 $t_1/t_2$，即

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{t_1}{t_2}$$

波前电子平均浓度与总的电子浓度比为

$$\frac{n_1}{n}=\frac{t_1}{t_1+t_2}=\frac{\frac{\lambda}{2}/(v_s-v_e)}{\frac{\lambda}{2}/(v_s-v_e)+\frac{\lambda}{2}/(v_s+v_e)}$$

$$=\frac{v_s+v_e}{2v_s}=\frac{2\times10^3+1.2\times10^3}{2\times2\times10^3}=80\%$$

$\therefore\quad n_1=\dfrac{v_s+v_e}{2v_s}=n=5\times10^{16}\times80\%=4\times10^{16}(1/\mathrm{cm}^3)$

由此题可知，在 $v_s$ 与 $v_e$ 比较接近时，大部分电子处在波前的位置，是沿声波传播方向运动的。当 $v_s$ 和 $v_e$ 差别很大，在波前的电子与在波后的电子相差不大。

# 习　题

12—1　某一半导体其电子和空穴的浓度分别为 $n$ 和 $p$，已知电子和空穴的迁移率分别为 $\mu_n$ 和 $\mu_p$，证明其霍尔系数的表达式为：

$$R=\frac{p\mu_p^2-n\mu_n^2}{q(p\mu_p+n\mu_n)^2}$$

据此简述霍尔系数与温度，掺杂浓度的关系。

分别导出(1)本征材料；(2)高掺杂 n 型半导体材料的霍尔系数。

12—2　一电阻值为500Ω的 p 型半导体样品，长 30mm，宽 6mm，厚 1mm。把它放到垂直于该样品平面的磁场中，其磁场强度为 0.5T，当通过样品的电流为 10mA 时，出现 5mV 的霍尔电压。试求半导体样品的霍尔迁移率和载流子密度。($\mu_H=10^{-2}\text{m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$，$p=6.25\times10^{15}/\text{cm}^3$)

如果把一个尺寸相同并携带相同电流的铜样品，放置到同一磁场中，并假设铜中传导电子的浓度约为 $8.5\times10^{22}/\text{cm}^3$，试求铜样品上的霍尔电压？($0.37\times10^{-9}$V)

12—3　已知掺杂硅样品的霍尔系数为 $3.66\times10^{-4}\text{m}^3/\text{C}$，样品电阻率为 $9.93\times10^{-3}$ Ω·m，假设只一种载流子导电，试求载流子浓度和迁移率。($2\times10^{22}/\text{m}^3$，$0.035\text{m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$)

12—4　一半导体样品厚 1mm，宽 10mm，位于磁场为 0.5T 的磁场中，磁场方向平行于 1mm 的边缘，在跨接样品宽度两边来测量霍尔电压。已知纵向流过样品的电流是 10mA，如该材料的霍尔系数是 $3.66\times10^{-4}\text{m}^3/\text{C}$，试计算霍尔电压。(1.83mV)

12—5　一个半导体样品的霍尔系数为 $3.66\times10^{-4}\text{m}^3/\text{C}$，其电阻率为 $3.93\times10^{-3}$Ω·m，样品位于 0.5T 的磁场中，试求其霍尔角。(1·1°)

12—6　求图 12-12 中 n 型硅样品的霍尔电压 $V_H$。

已知：$N_D=10^{12}/\text{cm}^3$，$B_z=0.2\text{Wb/m}^2$，$d=5$mm，$E_x=5$V/cm。

若将样品换成 p 型硅，其 $N_A=10^{12}/\text{cm}^3$，此时霍尔电压又为多少？

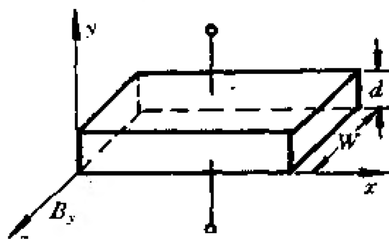


图 12-12

12—7　一块 p 型硅的电阻率为 200000Ω·cm，外加磁场 $B_z=0.1\text{Wb/m}^2$。

已知：样品的 $d=W=2$mm，通过样品的电流为 5μA，霍尔电压为 30mV，求霍尔迁移率 $\mu_p$。

12—8　n 型硅样品的电阻率为 100000Ω·cm 测得霍尔电压为 40mV，求所加磁场强度 $B$ 为多少？($0.308\text{Wb/m}^2$)

12—9　若上面图中的样品迁移率为 $3000\text{cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$，求样品流过的电流为多大？

12—10　如图 12-13 所示 Ge 样品，已知：$L=0.1\mu\text{m}$，$W=10^{-2}\mu\text{m}$，$d=2\times10^{-3}\mu\text{m}$，$B_z=5\times10^3$Gs，$I_x=1$mA，实验测得：$V_{AB}=-6.15$mV，$V_{CD}=400$mV。试确定 Ge 的导电类型，并求多数载流子浓度及其迁移率。

12—11　给半导体样品 $x$ 方向施加电场 $E_x$，在 $z$ 方向上加磁场 $B_z$ 时，则在 $y$ 方向上产